Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.17 – Spazi vettoriali euclidei

N.B. Negli esercizi seguenti si lavori rispetto al prodotto scalare standard.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di k i seguenti vettori v e w sono ortogonali:

(i) $v = (2, 1, 0, -k)$ e $w = (-2, 0, \pi, -k)$ in $\mathbb{R}^4$; [$k = \pm 2$]

(ii) $v = (1, -1, k)$ e $w = (k, 1, k)$ in $\mathbb{R}^3$; [$k = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$]

(iii) $v = (k^2, -1, -5)$ e $w = (2, 3, k)$ in $\mathbb{R}^3$. [$k = 3, -\frac{1}{2}$]

Esercizio 2. Determinare l'angolo (anche a meno del segno) compreso tra i seguenti vettori :

(i) $v = (2, 1)$ e $w = (-1, 2)$ in $\mathbb{R}^2$; [$\theta = \frac{\pi}{2}$]

(ii) $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^3$; [$\theta = \frac{\pi}{6}$]

(iii) $v = (5, 0, \sqrt{10}, -1)$ e $w = (-1, 0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^4$;

(iv) $v = (-1, 0, -1)$ e $w = (1, 2, 0)$ in $\mathbb{R}^3$. [$\theta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{10}})$]

Esercizio 3. Nel sottospazio $U = \mathcal{L}((1, -1, 1), (0, 1, 2), (-1, 2, 3))$ di $\mathbb{R}^3$ trovare due vettori che formano un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ radianti.
[Lo spazio U coincide con $\mathbb{R}^3$. Basta allora cercare tali vettori in $\mathbb{R}^3$. Si prendano ad esempio $v = (1, 0, 0)$ e $w = (-1, 1, 0)$]

Esercizio 4. Sia dato in $\mathbb{R}^2$ il vettore $v = (1, 3)$. Determinare il versore ortogonale a v formante col vettore $u = (1, -1)$ un angolo ottuso. Determinare poi tutti i vettori paralleli a v di lunghezza 3.
[$\hat{v} = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $w = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}(1, 3)$]

Esercizio 5. Verificare che i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v = (1, -2, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$ sono ortogonali e determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che li contiene. [si prenda $u = (1, 0, -1)$]

Esercizio 6. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che contiene *il* versore associato al vettore $v = (1, 2, 1)$. Scrivere le matrici di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Verificare che sono matrici ortogonali.

[Usiamo i vettori $w = (1, -1, 1)$ e $u = (1, 0, -1)$, si ottiene la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$]

Esercizio 7. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il piano vettoriale $W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$. Verificare che l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ associa la sua proiezione ortogonale su W è un endomorfismo. Trovare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$ e provare che sono sottospazi complementari in $\mathbb{R}^3$. Stabilire inoltre se F è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Si considerino i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, -1) \qquad v_2 = (1, 0, 1) \qquad v_3 = (1, 2, 0)$$

(i) Calcolare $||v_1||$, $||v_2||$ e $||v_3||$. [$\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$]

(ii) Calcolare gli angoli individuati dai tre vettori.
[$\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_{13} = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})$, $\theta_{23} = \arccos(\frac{1}{\sqrt{10}})$]

(iii) Determinare tutti i vettori contemporaneamente ortogonali a v_1 e v_2 e provare che formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. [$(v_1, v_2)^\perp = \mathcal{L}(1, -1, -1)$]

(iv) Calcolare tutti i vettori ortogonali a $w = \frac{1000}{873}v_3$. [si ottiene $v_3^\perp$]

(v) Determinare la proiezione ortogonale di v_1 e v_3 sulla direzione del vettore v_2.

$[\, P_{v_2}(v_1) = (0,0,0),\ P_{v_2}(v_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\,]$

Esercizio 9. Determinare in $\mathbb{R}^3$ il vettore proiezione ortogonale del vettore $v = (0,1,2)$ sul sottospazio W generato dai vettori $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$.

$[\, P_W(v) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)\,]$

Esercizio 10. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ a partire dalla base

$$\mathcal{B} = \{\, (1,0,1), (0,1,1), (0,1,-1) \,\}$$

$[\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \right\}]$

Esercizio 11. Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale di

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0 \right\}$$

Esercizio 12. Trovare una base ortogonale ed una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 13. Dato il parallelogramma $ABCD$, provare che

$$\| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{BD} \|^2 = 2 \| \overrightarrow{AB} \|^2 + 2 \| \overrightarrow{BC} \|^2$$

Determinare un punto D in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un parallelogramma, dove $A(-1,-1,2)$, $B(3,2,2)$ e $C(2,-2,2)$. Verificare l'identità del parallelogramma per $ABCD$.

Esercizio 14. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che vale la *prima formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$$

Esercizio 15. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che vale la *seconda formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{4} \left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \right)$$

Esercizio 16. Applicare il procedimento ortogonale di Gram-Schmidt ai vettori

$$v_1 = (1,2,-1) \qquad v_2 = (1,0,1), \qquad v_3 = (0,-1,2)$$

per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 17. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Provare che

(i) $(W^\perp)^\perp = W$

(ii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(iv) $U \subseteq W \;\Rightarrow\; W^\perp \subseteq U^\perp$

[Sia $v \in W^\perp$. Allora v è ortogonale a tutti i vettori di W, in particolare è ortogonale a tutti i vettori di U. Sicché $v \in U^\perp$.]

Esercizio 18. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = (-1,0,1)$ e $w_2 = (2,1,0)$. Decomporre il vettore $v = (1,1,-1)$ secondo i sottospazi W e $W^\perp$.

Esercizio 19. Determinare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1,1,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,-1,0) \qquad v_3 = (1,0,1,0)$$

Esercizio 20. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ versori a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $m \leqslant n$.

Esercizio 21. Calcolare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathcal{L}((0,-2,4,1),\ (25,8,29,3000),\ (0,2,1,1)\ (-1,2,1/2,3),\ (0,1,1,1))$$

[Si ha che $U = \mathbb{R}^4$. Si scelga la base canonica.]

Esercizio 22. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ a partire dai vettori

$$v_1 = (1,2,0,0) \qquad v_2 = (0,1,-1,0) \qquad v_3 = (0,0,1,-1) \qquad v_4 = (0,0,0,5)$$

Esercizio 23. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Decomporre il vettore $u = (1,2,-1)$ secondo W e $W^\perp$.

Esercizio 24. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y = x - z = 0 \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$. [$W = \mathcal{L}(2,1,2)$ e $W^\perp = \mathcal{L}((1,-2,0),(1,0,-1))$]

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

[$W = \mathcal{L}(2,1,2)$ e $W^\perp = \mathcal{L}((1,-2,0),(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1))$]

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

[$W = \mathcal{L}(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ e $W^\perp = \mathcal{L}((\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0),(\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{2}{3\sqrt{5}},-\frac{5}{3\sqrt{5}}))$]

Esercizio 25. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + z = 2y - t = 0 \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$.

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

Esercizio 26. Sia dato in $\mathbb{R}^5$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, x + z - t = y + z + u = 0 \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$.

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

Esercizio 27. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $u = (1,2,0,1)$ su W.

Esercizio 28. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$u_1 = (1,1,1,1) \qquad u_2 = (-3,1,1,1) \qquad u_3 = (0,1,1,-2)$$

Verificare che u_1, u_2, u_3 sono a due a due ortogonali. Trovare poi un vettore $u_4 \in \mathbb{R}^4$ di norma $\sqrt{2}$, formante un angolo acuto con $e_2 = (0,1,0,0)$ e tale che $\{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}$ sia una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 29. Costruire una matrice ortogonale di ordine 2 che contiene la riga $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

[$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$]

Esercizio 30. Costruire una matrice ortogonale di ordine 3 che contiene la colonna $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$.

[$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$]

Esercizio 31. Siano A e B due matrici ortogonali. Provare che anche AB è una matrice ortogonale.