Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.17 – Successioni numeriche

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(i) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$ [1]

(ii) $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\cos n\pi$ [0]

(iii) $\lim_{n\to+\infty} 2^{n}\cos n\pi$ [non esiste]

(iv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{5n+2}$ [$\frac{2}{5}$]

(v) $\lim_{n\to+\infty} \cos n\frac{\pi}{3}$ [non esiste]

(vi) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7}$ [1]

(vii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ [0]

(viii) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1}$ [non esiste]

(ix) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ [1]

(x) $\lim_{n\to+\infty} [\log(n+7)-\log n]$ [0]

(xi) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n^2$ [non esiste]

(xii) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n!} n^2$ [$+\infty$]

(xiii) $\lim_{n\to+\infty} \arcsin\left(\frac{n\sqrt{n}+1}{2n\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)$ [$\frac{\pi}{6}$]

(xiv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+4^n}{3^{n+1}+5^n}$

(xv) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-5}{n+1}\right)^n$

(xvi) $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}}-\sqrt{n}^{\,n}\right)$ [$-\infty$]

(xvii) $\lim_{n\to+\infty} \left(2-\frac{3}{n}\right)^{\log n}$

(xviii) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n}+n!}{n!+\cos\frac{1}{n}}\right)^{2n!}$ [$\frac{1}{e^2}$]

(xix) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n^2+n}}-e^n}{e^{n+2}}$ [$\frac{\sqrt{e}-1}{e^2}$]

(xx) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\log(n^2+3)-\log(n^2+2)\right]$ [1]

(xxi) $\lim_{n\to+\infty} \left[n^4-n^2\sqrt{n^4-1}\right]$ [$\frac{1}{2}$]

(xxii) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{\log n}\right)^n$ [$+\infty$]

Esercizio 2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ciascuna delle successioni numeriche il cui termine generale è :

(i) $a_n = \dfrac{3n+2}{n}$

[Il termine generale si può riscrivere come $a_n = 3 + \frac{2}{n}$, da cui si deduce che la successione è decrescente. Pertanto il suo estremo inferiore è dato dal limite per $n \to +\infty$. Si trova $\inf a_n = 3$. Il suo estremo superiore è quindi il primo valore assunto dalla successione. Ovviamente non per $n = 0$, ma per $n = 1$: $\sup a_n = 5$.]

(ii) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{n+3}$

[La successione data diverge positivamente, quindi $\sup a_n = +\infty$. Ci viene il sospetto che possa essere crescente, si dimostra che lo è. Pertanto il suo estremo inferiore è $a_0 = -\frac{1}{3}$.]

(iii) $a_n = \dfrac{n^2+4}{n}$

[La successione data diverge positivamente, quindi $\sup a_n = +\infty$. Tuttavia è crescente solo da $n = 3$ in poi. Quindi il suo estremo inferiore va scelto tra a_1, a_2 e a_3. Si trova $a_2 = \inf a_n = 4$.]

Esercizio 3. Provare che la successione di termine generale

$$a_n = \frac{2n-3}{5n+2}$$

è crescente.

Esercizio 4. Sia data la successione di termine generale

$$a_n = \sqrt{2n-7} - \sqrt{2n-3}.$$

(i) Provare che $a_n = \dfrac{-4}{\sqrt{2n-7}+\sqrt{2n-3}}$.

(ii) Provare che la successione è crescente.

(iii) Provare che la successione diverge positivamente.

Esercizio 5. Sia data la successione di termine generale

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

(i) Provare che la successione è decrescente.

(ii) Provare che la successione è limitata inferiormente.

Esercizio 6. È vero che una successione convergente è necessariamente monotona?