Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.18 – Funzioni implicite

Esercizio 1. Dimostrare che esiste una sola funzione continua e derivabile $y = \varphi(x)$, definita in un intorno del punto $x = 2$, soddisfacente l'equazione:

$$x^2 + y^3 - 2xy - 1 = 0,$$

e alla condizione $\varphi(2) = 1$. Calcolare poi $\varphi'(2)$ e $\varphi''(2)$. Determinare la retta tangente a φ in $(2, 1)$.

Esercizio 2. Dimostrare che esiste una sola funzione continua e derivabile $y = \varphi(x)$, definita in un intorno del punto $x = 0$, soddisfacente l'equazione:

$$xe^y - y + 1 = 0,$$

che per $x = 0$ assume il valore 1. Calcolare poi $\varphi''(0)$. Determinare la retta tangente a φ in $(0, 1)$.

Esercizio 3. Dimostrare che esiste una sola funzione continua e derivabile $y = \varphi(x)$, definita in un intorno del punto $x = -2$, soddisfacente l'equazione:

$$(x + y)^2 = y^3,$$

che per $x = -2$ assume il valore 1. Calcolare il polinomio di Taylor arrestato al terzo ordine di φ in un intorno del punto $x = -2$.

Ripetere l'esercizio nel punto $P(0, 1)$.

Esercizio 4. Calcolare, al variare di $k < 1$, la derivata prima e seconda della funzione implicitamente e localmente definita dall'equazione

$$y - x - k \sin y = 0,$$

il cui grafico passa per l'origine.

Esercizio 5. Determinare i massimi ed i minimi relativi delle funzioni implicitamente definite dall'equazione

$$y^3(4 - y) - x^2 = 0.$$

[Vanno cercati i punti a tangente orizzontale del grafico della curva descritta dall'equazione data. Si trova un solo punto di massimo relativo per $x = 0$ e tale massimo vale 4.]

Esercizio 6. Determinar ei massimi e minimi relativi delle funzioni implicitamente definite dall'equazione:

$$x^4 + 2x^2y - y^3 = 0.$$

[L'equazione definisce un ramo che per $x = 1$ vale -1 ed ha il valore minimo -1 per $x = 1$. Il ramo invece he per $x = -1$ vale -1 ha il valore minimo -1 per $x = -1$.]

Esercizio 7. Per quali valori del parametro reale a, la funzione $y = f(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$2y + e^{ax^2+y} = 1,$$

e dalla condizione $y(0) = 0$, ha un minimo relativo per $x = 0$? [$a < 0$]