

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria  
Elettrotecnica  
Geometria - A.A. 2017-2017 – prof. Cigliola  
Foglio n.18 – Piano euclideo

**Esercizio 1.** Un triangolo  $ABC$  è isoscele sulla base  $AB$  ed ha il vertice  $C$  sulla retta  $r : x + y = 1$ . Calcolare il vertice  $C$  e l'area del triangolo sapendo che  $A = (2, 0)$  e  $B = (4, 6)$ .

[Il vertice  $C$  è dato dall'intersezione della retta  $r$  e della retta  $r'$  perpendicolare ad  $AB$ , passante per il punto medio  $M(3, 3)$  di  $AB$ . Si trova  $r' : x + 3y - 12 = 0$  e  $C(\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$ . Si ha poi che la base del triangolo misura  $AB = 2\sqrt{10}$  e l'altezza  $CM = \frac{\sqrt{34}}{2}$ , da cui  $\mathcal{A} = \sqrt{85}$ .]

**Esercizio 2.** Trovare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette  $3x - y + 7 = 0$  e  $y = x + 5$  e perpendicolare alla retta  $2x - 4y - 1 = 0$ .

**Esercizio 3.** Sono dati i punti  $A(-2, 1)$  e  $B(-3, 3)$ . Trovare sull'asse delle ascisse il punto  $P$  equidistante da  $A$  e  $B$ .

[Si tratta di intersecare l'asse  $r$  del segmento  $AB$  con l'asse  $x$ . Si trova  $r : 2x - 4y + 13 = 0$  e  $P(-\frac{13}{2}, 0)$ .]

**Esercizio 4.** Un quadrato  $ABCD$  ha un vertice in  $A(1, 2)$  e il lato  $BC$  è contenuto nella retta  $r : 4x + 16y + 16 = 0$ . Calcolare tutti i vertici del quadrato, il suo perimetro e la sua area.

**Esercizio 5.** Sia  $D$  il punto in cui la retta  $r : 2x - 3y + 2 = 0$  interseca la retta passante per  $A(-3, 2)$  e  $B(1, -2)$ . Condurre da  $D$  la retta  $s$  perpendicolare ad  $\overrightarrow{AB}$  e sia  $C$  il punto in cui si intersecano  $s$  e la retta per  $B$  parallela all'asse  $y$ . Calcolare l'area del triangolo  $ABC$ .

**Esercizio 6.** Trovare la distanza di  $P(2, -3)$  dalla retta  $4x - 3y + 7 = 0$ . [ $d = \frac{24}{5}$ ]

**Esercizio 7.** Costruire un rombo di lato 4 sistemando i suoi vertici sulle rette perpendicolari  $r : x - 2y + 3 = 0$  ed  $s : 2x + y - 10 = 0$ .

[Scegliamo a caso un punto su  $r$ , distante da  $s$  meno di 4 e che non sia il punto di intersezione tra  $r$  ed  $s$ . Esso sarà il primo vertice  $A$ . Si prenda ad esempio  $A(1, 2)$ . I vertici  $B$  e  $D$  saranno dati dall'intersezione della retta  $s$  e la circonferenza di centro  $A$  e raggio 4. Abbiamo  $B(\frac{17-2\sqrt{11}}{5}, \frac{16+4\sqrt{11}}{5})$  e  $D(\frac{17+2\sqrt{11}}{5}, \frac{16-4\sqrt{11}}{5})$ . Il punto  $C$  è dato chiudendo il quadrilatero a parallelogramma:  $C = B + D - A = (\frac{29}{5}, \frac{22}{5})$ .]

**Esercizio 8.** Calcolare l'ampiezza degli angoli compresi tra le rette  $r : x - 2y + 5 = 0$  e  $s : x + y - \pi = 0$ .

[Due versori direzionali sono  $v = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$  e  $w = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . Il loro prodotto scalare dà il coseno dei due angoli (tra loro supplementari) formati dalle due rette:  $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ . Pertanto i due angoli sono  $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$  e  $\pi - \alpha$ .]

**Esercizio 9.** Determinare tutti i punti equidistanti da  $A(2, -1)$  e da  $B(1, 3)$ .

[Si ottiene l'asse del segmento  $AB$ :  $d(A, P) = d(B, P)$ . Da cui, semplificando,  $r : 2x - 8y - 5 = 0$ .]

**Esercizio 10.** Calcolare gli angoli compresi tra una retta  $r$  di parametri direttori  $(2, 1)$  e la retta  $r'$  di equazione  $x + 3y - 1 = 0$ .

**Esercizio 11.** Determinare la circonferenza passante per i punti  $O(0,0)$ ,  $A(1,2)$  e  $B(2,1)$ .

[Se la circonferenza cercata è  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , si deve risolvere il sistema

$$\text{lineare } \begin{cases} c = 0 \\ 1 + 4 + a + 2b = 0 \\ 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } \mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y = 0.]$$

**Esercizio 12.** Determinare la circonferenza con un diametro di estremi  $A(1,2)$  e  $B(2,1)$ .

**Esercizio 13.** Determinare, se esiste, la circonferenze passante per i punti  $O(1,1)$ ,  $A(2,2)$  e  $B(-1,-1)$ .

**Esercizio 14.** Dato il punto  $A(1,-1)$  e la retta  $r : x - y - 5 = 0$ , determinare

- (i) la proiezione ortogonale di  $A$  su  $r$ ;
- (ii) la distanza di  $A$  da  $r$ ;
- (iii) il simmetrico di  $A$  rispetto ad  $r$ .

**Esercizio 15.** Dati i punti  $A(1,0)$ ,  $B(3,2)$  e  $C(-2,1)$ ,

- (i) determinare i punti equidistanti da  $A$  e da  $B$ ;
- (ii) determinare i punti equidistanti da  $A$ ,  $B$  e  $C$ ;
- (iii) calcolare l'area del triangolo  $ABC$ ;
- (iv) calcolare il perimetro del triangolo  $ABC$ ;
- (v) calcolare i coseni degli angoli del triangolo  $ABC$ .

**Esercizio 16.** Siano dati  $A(1,-1)$  e  $B(2,2)$ . Determinare i punti  $P$  del piano tali che  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ . [Si trova la circonferenza di diametro  $AB$ .]

**Esercizio 17.** Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo retto il segmento di estremi  $A(2,1)$  e  $B(-2,2)$ .

[Si ottiene la circonferenza di diametro  $AB$ .]

**Esercizio 18.** Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo di  $30^\circ$  il segmento di estremi  $A(2,0)$  e  $B(-2,0)$ .

**Esercizio 19.** Determinare la circonferenza di centro  $(2,-3)$  e raggio 4.

$$[(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16]$$

**Esercizio 20.** Per quali valori di  $k$  la seguente equazione rappresenta una circonferenza?

$$x^2 + y^2 - 3x + y + k = 0$$

$$[k < \frac{10}{4}]$$

**Esercizio 21.** Trovare la circonferenza tangente nell'origine alla retta  $r : y - 3x = 0$  ed avente il centro nella retta  $s : 2x + y - 1 = 0$ .

[Ricordiamo che la retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Detta allora  $t$  la retta perpendicolare ad  $r$  e passante per l'origine, si ha che il centro della circonferenza è l'intersezione di  $s$  e  $t$ . Si ottiene  $t: x + 3y = 0$  e  $C(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ . Il raggio è dato dalla distanza di  $C$  dall'origine:  $R = \sqrt{\frac{2}{5}}$ .]

**Esercizio 22.** Sono dati nel piano i punti

$$A(-1, 1) \qquad B(2, 1) \qquad C(1, 2)$$

- (i) Determinare il perimetro del triangolo  $ABC$ .
- (ii) Calcolare il centro della circonferenza circoscritta ad  $ABC$ .
- (iii) Calcolare il raggio della circonferenza inscritta ad  $ABC$ .
- (iv) Determinare la circonferenza passante per  $A, B, C$ .