Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.18 – Serie numeriche

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie e calcolarne, quando possibile, la somma:

(i) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ [convergente perché serie armonica con $\alpha = \frac{3}{2}$]

(ii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$

[La serie può essere portata nella forma di tipo Mengoli se, come per gli integrali, si pone $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Si trova $A = 1$ e $B = -1$. Sicché la serie diventa $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Si trova che la somma parziale n-esima è $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Pertanto la serie è convergente e la sua somma vale 1.]

(iii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

[Si proceda come sopra. Si trova $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}$. Pertanto la serie è convergente e la sua somma vale $\frac{1}{2}$.]

(iv) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$ [La serie è converge a $\frac{1}{3}$.]

(v) $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ [La serie è geometrica. Essa converge a $\frac{4}{3}$.]

(vi) $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

[La serie è geometrica e convergente, però essa parte dal termine di indice $n = 2$. Quindi al valore della somma $\frac{1}{1-\frac{1}{6}}$ vanno sottratti i primi tre addendi della somma. In definitiva essa converge a $\frac{1}{30}$.]

(vii) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ [La serie converge a $\frac{3}{2}$.]

(viii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-15}$ [divergente, si usi il confronto asintotico]

(ix) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ [convergente]

(x) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{2n+1}$ [divergente]

(xi) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{10n}}$ [divergente]

(xii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n!)^2}$ [convergente]

(xiii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{5^n+1}$ [convergente]

(xiv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ [convergente]

(xv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{3^n+1}$ [convergente]

(xvi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3 5^n}{n!}$ [convergente]

(xvii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{11^n}{10^n \cdot n^5}$ [divergente]

(xviii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{(2n)!}$ [convergente]

(xix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ [convergente]

(xx) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ [convergente]

(xxi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\log^n n(n+1)}$ [convergente]

(xxii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ [convergente]

(xxiii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{n-1}}{(n+2)!}$ [convergente]

(xxiv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ [convergente]

(xxv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+1}{n^3-5}$ [divergente]

(xxvi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ [divergente]

(xxvii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ [convergente]

(xxviii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ [convergente]

(xxix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ [convergente ma non assolutamente]

(xxx) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$ [convergente assolutamente]

(xxxi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ [convergente ma non assolutamente]

(xxxii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{(-1)^n \cdot n}{10^n}\right)$ [divergente]

(xxxiii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{6n-5}$ [non convergente]

(xxxiv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ [convergente assolutamente]

(xxxv) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$ [convergente assolutamente]

Esercizio 2. Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ le seguenti serie numeriche convergono:

(i) $\sum_{n\geqslant 0}(3x)^n$

[Si tratta di una serie geometrica di ragione $q=3x$. La serie allora converge se e solo se $|3x|<1$, ovvero se $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$.]

(ii) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2-x)^n}$ [$x<1\ \vee\ x>3$]

(iii) $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{1-\log|x|}\right)^n$ [$x<-e^2\ \vee\ -1<x<0\ \vee\ 0<x<1\ \vee\ x>e^2$]

(iv) $\sum_{n\geqslant 1}\log(n+1)x^n$

[Poiché x è un numero reale qualsiasi, conviene utilizzare il criterio dell'assoluta convergenza. Applicando il criterio del rapporto (visto che la serie è a termini positivi) si trova che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+2)|x|^{n+1}}{\log(n+1)|x|^n}=|x|$. Quindi la serie converge assolutamente, quindi converge, per $|x|<1$, ovvero se $-1<x<1$. Se invece $x\geqslant 1$ la serie è a termini positivi e diverge positivamente usando il criterio del rapporto. Quando $x\leqslant -1$ la serie non converge poiché il termine generale non è infinitesimo (prendendo n pari $a_n\to+\infty$).]

(v) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n x^n}{n}$

[Come sopra, si proceda prima con lo studio dell'assoluta convergenza. Si trova che converge per $-1<x<1$. Per $x\geqslant 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo. Per $x=-1$ la serie diventa armonica e non converge. Per $x<-1$ la serie ha termine generale che può essere riscritto come $a_n=\frac{(-1)^n(-1)^n|x|^n}{n}=\frac{|x|^n}{n}$ che non essendo infinitesimo, non permette alla serie di convergere.]

(vi) $\sum_{n\geqslant 1}n!x^n$ [Converge solo per $x=0$.]

(vii) $\sum_{n\geqslant 1}(2^n+3^n)x^n$

[Con il criterio del rapporto applicato alla serie dei valori assoluti si trova che deve essere $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. Se $x=\pm\frac{1}{3}$ la serie non ha termine generale infinitesimo quindi non converge. Se $x>\frac{1}{3}$ il temine generale diverge positivamente, quindi la serie non può convergere; se poi $x<-\frac{1}{3}$ il termine generale non è infinitesimo (perché in valore assoluto diverge) quindi la serie non converge.]

(viii) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ [$-2\leqslant x<2$]

(ix) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2x)^n}{n^2}$ [$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$]