Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.19 – Equazioni differenziali

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(i) $y' = 3\sin^2 x \cos x$ $[\, y = \sin^3 x + c \,]$

(ii) $y' = \dfrac{x+1}{x}$ $[\, y = x + \log|x| + c \,]$

(iii) $yy' = 3$ $[\, y^2 = 6x + c \,]$

(iv) $y' = 2y + 3$ $[\, y = \frac{c\,e^{2x}-3}{2} \,]$

(v) $y' - 3x^2y^2 = 0$ $[\, y = -\frac{1}{x^3+c},\ y = 0 \,]$

(vi) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-1}$ $[\, y = c(x^2-1) \,]$

(vii) $y + x^2y' = xy$ $[\, y = kx^{\frac{1}{x}} \,]$

(viii) $y \cdot \operatorname{tg} x = y'$ $[\, y = \frac{c}{\cos x} \,]$

(ix) $\sin x \cdot y + y' \cos x = 0$ $[\, y = c\cos x \,]$

(x) $y' = 2xy - 2x^3$ $[\, y = ce^{x^2} + x^2 + 1 \,]$

(xi) $y' = xy + x^3$ $[\, y = -x^2 - 2 + ce^{\frac{1}{2}x^2} \,]$

(xii) $y' = x(y - 2x^2)$ $[\, y = 2x^2 + 4 + ce^{\frac{1}{2}x^2} \,]$

(xiii) $y' + xy + x = 0$ $[\, y = ce^{-\frac{1}{2}x^2} - 1 \,]$

(xiv) $y'x - 2y = e^x x^3$ $[\, y = x^2(e^x + c) \,]$

(xv) $y' = \dfrac{2}{x}y + \dfrac{1 - 2\log x}{x}$ $[\, y = \log x + cx^2 \,]$

(xvi) $y' = -\dfrac{yx}{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $[\, y = \frac{c+x}{\sqrt{x^2+1}} \,]$

(xvii) $y' + y + 2e^{-x}(x+1) = 0$ $[\, y = e^{-x}(-x^2 - 2x + c) \,]$

(xviii) $y' + \dfrac{y}{x(1+\log x)} = 1$ $[\, y = \frac{x\log x + c}{1+\log x} \,]$

(xix) $9y'' + y = 0$ $[\, y = c_1\cos\frac{x}{3} + c_2\sin\frac{x}{3} \,]$

(xx) $y'' + 8y' + 16y = 0$ $[\, y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x} \,]$

(xxi) $y'' + 5y' + 6y = 0$ $[\, y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} \,]$

(xxii) $y'' - 6y' + 10y = 0$ $[\, y = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x) \,]$

(xxiii) $y'' - 12y' + 36y = 0$ $[\, y = e^{6x}(c_1 + c_2x) \,]$

(xxiv) $y'' - 4y' - 5y = 10$ $[\, y = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} - 2 \,]$

(xxv) $y'' + y = 4$ $[\, y = c_1\cos x + c_2\sin x + 4 \,]$

(xxvi) $y'' - 2y' + 2y = 1$ $[\, y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x + \frac{1}{2} \,]$

(xxvii) $y'' + y' = x + 2$ $[\, y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x^2}{2} + x \,]$

(xxviii) $y'' + 4y = x^2$ $\quad [\, y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\,]$

(xxix) $y'' - 3y' + 2y = x^2$ $\quad [\, y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\,]$

(xxx) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ $\quad [\, y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x\,]$

(xxxi) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ $\quad [\, y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + xe^{2x}\,]$

(xxxii) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ $\quad [\, y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}\,]$

(xxxiii) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ $\quad [\, y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}\,]$

(xxxiv) $y'' + y = e^x$ $\quad [\, y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x\,]$

(xxxv) $y'' - 4y = e^{2x}$ $\quad [\, y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\,]$

(xxxvi) $y'' + y = x^2 + \sin x$ $\quad [\, y(x) = c_2 \sin x + c_1 \cos x + x^2 - \frac{1}{2}x \cos x - 2\,]$

(xxxvii) $y'' + y = 3 \sin x$ $\quad [\, y(x) = c_2 \sin x + c_1 \cos x - \frac{3}{2}x \cos x\,]$

(xxxviii) $y'' + y = -3e^x \sin x$ $\quad [\, y(x) = c_2 \sin x + c_1 \cos x - \frac{3}{5}e^x \sin x + \frac{6}{5}e^x \cos x\,]$

(xxxix) $y'' + y = 4x \sin x$

[Si faccia attenzione che la soluzione particolare deve essere più convenientemente del tipo $\overline{y}(x) = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)(A \sin x + B \cos x)$. Si trova la soluzione generale $y(x) = c_2 \sin x + c_1 \cos x - x^2 \cos x + x \sin x$]

(xl) $y'' + y' = \sin x + \cos x$ $\quad [\, y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - \cos x\,]$

(xli) $y'' + y' = (x-1)e^x$ $\quad [\, y(x) = c_1 e^x + c_2 - 2xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x\,]$

Esercizio 2. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

(i) $\begin{cases} y' = \dfrac{x+1}{x-1} \\ y(2) = 0 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = x + 2 \log |x-1| - 2\,]$

(ii) $\begin{cases} y' = \dfrac{3(y+1)}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = 4x^3 - 1\,]$

(iii) $\begin{cases} y' = \dfrac{x(y+1)}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = \sqrt{x^2+1} - 1\,]$

(iv) $\begin{cases} y' \cos y + \dfrac{2x}{y} = 0 \\ y(1) = \pi \end{cases}$

[Risolvendo il problema si ottiene $x^2 + y \sin y + \cos y = 0$ che non può essere esplicitata in maniera elementare]

(v) $\begin{cases} e^{2y-x} y' = 1 \\ y(0) = \frac{1}{2}\log 2 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = x + 2 \log |x-1| - 2\,]$

(vi) $\begin{cases} y^2 y' = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 8}\,]$

(vii) $\begin{cases} y' + 2y - x - 2 = 0 \\ y(2) = 3 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = \frac{5}{4}e^{4-2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\,]$

(viii) $\begin{cases} y' + y \cos x = \sin x \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad [\, y(x) = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1\,]$

(ix) $\begin{cases} (x+1)y' - 2x = 2(1+y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $[\, y(x) = x^2 - 1 \,]$

(x) $\begin{cases} 4y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = -2 \end{cases}$ $[\, y(x) = \cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} \,]$

(xi) $\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ $[\, y(x) = -\frac{\pi}{2}\sin x + x \,]$

(xii) $\begin{cases} 2y'' - 5y' + 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $[\, y(x) = e^{2x}(x+1) \,]$

(xiii) $\begin{cases} 4y'' + 9y' = 5\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$ $[\, y(x) = \sin\frac{3}{2}x + \sin x \,]$

Esercizio 3. Determinare la curva integrale dell'equazione differenziale $xy' + 2y = 0$ passante per il punto $(-1, 3)$. $[\, y = \frac{3}{x^2} \,]$

Esercizio 4. Determinare la curva integrale dell'equazione $(x+2)y^2 = y'$, passante per il punto $(0, 4)$. Dire poi, al variare della costante di integrazione, quali soluzioni dell'equazione differenziale ammettono uno, due o nessun asintoto verticale.

[La soluzione generale è $y = \frac{-2}{x^2+4x+2c}$. La soluzione particolare è $y = \frac{4}{1-2x^2-8x}$. Al variare di c si trovano rispettivamente per $c = 2$ un asintoto, per $c < 2$ due asintoti, per $c > 2$ nessun asintoto.]

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$(y' + y)x^2 = e^{-x}$$

determinare l'equazione della curva integrale passante per il punto $A(1, e^{-1})$ e l'equazione delle sua retta tangente in A. Disegnare poi tale curva. $[\, y = e^{-x}(2 - \frac{1}{x}),\ y = e^{-1} \,]$