

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
 Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
 Foglio n.19 – Prodotto vettoriale

Esercizio 1. Siano dati $a \in \mathbb{R}$ ed i vettori $u = \vec{i} + (a - 1)\vec{j} + (a + 1)\vec{k}$, $v = a\vec{i} + 2a\vec{j} + \vec{k}$ e $w = 2\vec{i} + (a + 3)\vec{j} + 2a\vec{k}$ di \mathbb{R}^3 . Determinare i valori di a per cui:

(i) u è parallelo a $3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$;

$$[\text{Deve essere } \begin{cases} 1 = 3\lambda \\ a - 1 = -3\lambda, \\ a + 1 = 3\lambda \end{cases} \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Si trova } \lambda = 1/3 \text{ ed } a = 0.]$$

(ii) w è parallelo a $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; [a=2]

(iii) $\|u\| = 2$; [a = ± 1/√2]

(iv) $u // v$; [per nessun valore di a]

(v) $u \perp v$; [per nessun valore di a]

(vi) u, v e w è una base ortogonale di \mathbb{R}^3 ; [per nessun valore di a]

(vii) $v \wedge w = \vec{0}$; [a = 1]

(viii) $v \wedge w$ è parallelo a $18\vec{i} - 18\vec{j} + 54\vec{k}$;

(ix) v è complanare con $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} + \vec{k}$;

(x) $u \wedge v \cdot w = 0$. [a = 1, a = 5±3√5/2]

Esercizio 2. Siano v e w due vettori di \mathbb{R}^2 . Si supponga che $v \wedge w \cdot u = 0$, per ogni $u \in \mathbb{R}^2$. Cosa si può dedurre su v e w ?

[Per ogni $u \in \mathbb{R}^3$, il vettore $v \wedge w$ è ortogonale a u . L'unica possibilità è che $v \wedge w$ sia il vettore nullo. Pertanto v e w sono linearmente dipendenti, ovvero proporzionali]

Esercizio 3. Sia dato in \mathbb{R}^3 il vettore $v = (2, 1, -1)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^3$ associa $F(u) = u \wedge v$.

(i) Dimostrare che F è un endomorfismo di \mathbb{R}^3 .

[segue dal fatto che il prodotto vettoriale è un'operazione che rispetta la somma tra vettori ed il prodotto con scalare reale]

(ii) Stabilire se F è simmetrico.

[No. Per costruire un preciso controesempio, si osservi che dati due vettori v e w , da un lato si ha che $F(v) \cdot w = u \wedge v \cdot w$, mentre $v \cdot F(w) = v \cdot u \wedge w$. Tali due numeri reali, se non nulli, sono l'uno l'opposto dell'altro, per via delle proprietà dei determinanti.]

(iii) Determinare se F è un automorfismo e calcolare $\text{Ker } F$ ed $\text{Im } F$.

[F non è invertibile, infatti $F(u) = u \wedge u = \mathbf{0}$. Inoltre un vettore v è nel nucleo di F se e solo se $F(v) = u \wedge v = \mathbf{0}$, se e solo se v è proporzionale ad u . Allora $\text{Ker } F = \mathcal{L}(u)$. Per quanto riguarda l'immagine di F osserviamo preliminarmente che $\text{Im } F \subset u^\perp$, poiché il prodotto vettoriale produce vettori che sono ortogonali ad i vettori che sono stati moltiplicati. Inoltre, sappiamo che $\dim \text{Im } F = 2$, per il teorema del rango, e che $\dim u^\perp = 2$, per il teorema di Fourier. Ne segue che $\text{Im } F = u^\perp$, avendo essi la stessa dimensione.]

(iv) Trovare autovalori e autospazi di F e stabilire se esso è diagonalizzabile.

[Sia λ autovalore di F . Allora $F(v) = \lambda v = u \wedge v$. Ne segue che il vettore $F(v)$ è sia parallelo che ortogonale a v , non può allora che essere nullo. Sicché l'unico autovalore di F è quello nullo, ed essendo F un'applicazione non nulla, non può essere diagonalizzabile.]

Esercizio 4. Sia dato in \mathbb{R}^4 il vettore $v = (-2, -1, 1, 2)$. Si consideri l'applicazione $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^4$ associa $F(u) = u \cdot v$.

(i) Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

[Segue dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare.]

(ii) Calcolare $\text{Ker } F$ ed $\text{Im } F$.

[$\text{Ker } F$ è l'insieme dei vettori ortogonali a v , l'immagine invece coincide con \mathbb{R} .]

Esercizio 5. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3 $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolvere l'equazione vettoriale $u \wedge x = u \wedge v$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

[Se $u \wedge x = u \wedge v$, abbiamo anche che $u \wedge (x - v) = \mathbf{0}$. Pertanto i vettori u e $x - v$ sono proporzionali: $x = \lambda u + v$.]

Esercizio 6. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3 $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolvere l'equazione vettoriale $u \wedge x = v \wedge 2u$.

[Come sopra osservando però che $u \wedge x = v \wedge 2u = -2u \wedge v = u \wedge (-2v)$. Quindi $x = \lambda u + 2v$.]

Esercizio 7. Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $u = (a, 1, -2)$, $v = (1, 0, -1)$, $w = (2, -1, 3)$ e $t = (1, 0, 2)$. Per quali valori di a il vettore t è ortogonale a $\|u\|v \wedge w - (u \cdot u)u \wedge w$?

Esercizio 8. Siano u , v e w vettori non complanari di \mathbb{R}^3 . Calcolare la dimensione dei sottospazi generati da:

(i) $S = \{ u, v, (u \wedge v \cdot w)w \}$;

[Se u , v e w non sono complanari, il loro prodotto misto è non nullo. Allora otteniamo una nuova base di \mathbb{R}^3 : $\dim S = 3$]

(ii) $S = \{ u, v, (u + v) \wedge (u - v) \}$;

[$\dim S = 3$. Anzitutto u e v sono indipendenti per ipotesi. Si ha poi che $(u + v) \wedge (u - v) = 2v \wedge u$, che è ortogonale ad entrambi u e v . Allora è linearmente indipendente da questi.]

(iii) $S = \{ u, u + v, u \wedge (u + v) \}$;

[$\dim S = 3$. Per ipotesi u e v sono indipendenti. Allora $u + v$ è indipendente da u . Il vettore $u \wedge (u + v)$ è ortogonale sia ad u che a v , allora è indipendente da entrambi.]

(iv) $S = \{u + (u \wedge v), v + (u \wedge v), u - v\}$;

[$\dim S = 2$. Il terzo vettore è differenza dei primi due che sono tra loro linearmente indipendenti.]

(v) $S = \{u, -3v, (v \cdot w)w\}$;

[$2 \leq \dim S \leq 3$. I primi due sono indipendenti. Il terzo può essere nullo se v e w vengono scelti ortogonali.]

(vi) $S = \{u \wedge v, u \wedge w, w \wedge v\}$.

[Procediamo col metodi degli scarti successivi. Siccome per ipotesi vettori u e v sono linearmente indipendenti, $u \wedge v \neq \mathbf{0}$. Supponiamo ora che $u \wedge v = \lambda(u \wedge w)$. Allora $u \wedge v - u \wedge (\lambda w) = u \wedge (v - \lambda w) = \mathbf{0}$. Ciò accade se e solo se u è multiplo di $v - \lambda w$, il che equivale a dire che u è linearmente dipendente da v e w , contrariamente all'ipotesi. Infine, sia $u \wedge v = \lambda(u \wedge w) + \mu(w \wedge v) = (\lambda u) \wedge w + (-\mu v) \wedge w = (\lambda u - \mu v) \wedge w$. Ne deduciamo che il vettore $u \wedge v$ è ortogonale oltre che a u e v , anche a w . Non può che essere il vettore nullo. Ma questo contraddice l'ipotesi per cui u e v sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim S = 3$.]

Esercizio 9. Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che $\{u, v, w\}$ sia una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .

(i) Se u, v e w costituiscono una base ortonormale il loro prodotto misto vale 1. Allora facilmente $\dim S = 3$.

(ii), (iii), (iv) Come nell'Esercizio precedente. Come nell'Esercizio precedente.

(v) $\dim S = 2$ perché per ipotesi il vettore w è ortogonale a v .

(vi) Come nell'Esercizio precedente o si osservi che lavorando con una base ortonormale, necessariamente $u \wedge v = \pm w$, $u \wedge w = \pm v$ e infine $w \wedge v = \pm u$.]

Esercizio 10. Rappresentare graficamente il quadrilatero $ABCD$ di vertici

$$A(5, 2) \quad B(-2, 5) \quad C(-4, -3) \quad D(-1, 2).$$

Calcolarne l'area e il perimetro.

Esercizio 11. Sia D il punto in cui la retta $r : 2x - 3y + 2 = 0$ interseca la retta passante per $A(-3, 2)$ e $B(1, -2)$. Condurre da D la retta s perpendicolare ad \overrightarrow{AB} e sia C il punto in cui si intersecano s e la retta per B parallela all'asse y . Calcolare l'area del triangolo ABC .

Esercizio 12. Dimostrare che quattro punti A, B, C, D sono complanari se e solo se

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = 0$$

[Suggerimento: tale prodotto misto dà il volume del parallelepipedo sotteso ai vertici A, B, C, D .]

Esercizio 13. Calcolare il volume di un parallelepipedo retto di dimensioni a, b e c utilizzando la nozione di prodotto misto. [$V = abc$]