Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016 – prof. Cigliola
Foglio n.1 – Calcolo matriciale

Esercizio 1. Calcolare:

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T$. $\quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcolare:

(i) $2A - B$; $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $3A + 2B - 4C$; $\quad \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $-2A + B + 2C - 2B$;

(iv) $3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C)$; $\quad \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $A^T + B^T - 2C^T$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, quando possibile

(i) AC; $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $(BC)A$; $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $B + (CA)$; $\quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) BA; [non calcolabile]

(v) BA^T; $\quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(vi) $3A^T + BC$.

Esercizio 4. Una matrice quadrata A si dice idempotente se $A^2 = A$. Dimostrare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora A e B sono matrici idempotenti.

Esercizio 5. Trovare una formula per il calcolo delle seguenti potenze di matrici a coefficienti reali e la si dimostri per induzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

[Si hanno rispettivamente le matrici $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $n \geqslant 1$, ed infine $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, per ogni $n \geqslant 1$.]

Esercizio 6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, provare che $A^2 = 2A - I_2$ e calcolare A^{100}.
[Suggerimento: Per il calcolo della potenza conviene usare una formula da dimostrare per induzione come nell'esercizio precedente.]

Esercizio 7. Trovare le matrici della forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $X^2 = I_2$. Provare inoltre che l'unica matrice per cui si ha $X^3 = I_2$ è la matrice $X = I_2$.
[Le sole matrici di tipo X per cui si ha $X^2 = I_2$ sono la matrice identica, la sua opposta e tutte le matrici di tipo $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $b \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 8. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $AX = 0_2$. [Si ottengono le matrici di tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$, al variare di z e t in $\mathbb{R}$.]

Esercizio 9. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $XA = 0_2$. [Si trova la sola matrice nulla.]

Esercizio 10. Trovare tutte le matrici a coefficienti reali che commutano rispetto al prodotto con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ripetere lo stesso esercizio con la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
[Le matrici che commutano con A sono della forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, al variare di x e y in $\mathbb{R}$. Le matrici che commutano con B sono della forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$, al variare di x e y in $\mathbb{R}$.]

Esercizio 11. Siano A e B due matrici simmetriche di ordine n a coefficienti reali. Provare che AB è una matrice simmetrica se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 12. Si dimostri che per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le matrici $A+A^T$, A^TA ed AA^T sono simmetriche e che la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.

Esercizio 13. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Decomporre tali matrici come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

[Si utilizzino le formule date a lezione. Per A si ottengono la parte simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ e la parte antisimmetrica $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Per B si ottengono la parte simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e la parte antisimmetrica $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice D è simmetrica, allora coincide con la sua parte simmetrica e la sua parte antisimmetrica è nulla: (0). Lo stesso accade alla matrice E che è simmetrica. Similmente, la matrice F è antisimmetrica quindi ha parte simmetrica nulla e coincide con la sua parte antisimmetrica.]

Esercizio 14. Scrivere esplicitamente tutte le matrici che verificano le seguenti proprietà:

(i) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ i & \text{se } i = j. \end{cases}$ [Si ottiene la sola matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.]

(ii) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ |i| & \text{se } i = j. \end{cases}$

[Si ottengono le matrici di tipo $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$, con tutte le combinazioni di segno possibili.]

(iii) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = i - j$. [Si ha la matrice antisimmetrica $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.]

(iv) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = i^2 - j$. [Si ha la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.]

(v) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ (ovvero le matrici quadrate di ordine 3 a coefficienti interi), con $a_{ij} = 0$ se $i \geqslant 2$ e con $|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| = 2$.

[Tali matrici hanno la seconda e la terza riga nulle. Poiché la somma dei tre numeri interi positivi $|a_{11}|$, $|a_{12}|$ e $|a_{13}|$ deve dare 2, due di essi devono essere uguali ad 1 o -1 ed il terzo deve essere nullo; oppure uno di essi vale ± 2 e i rimanenti due sono nulli. Si hanno pertanto le diciotto matrici $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con tutte le combinazioni possibili dei segni.]

(vi) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, con $|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{23}| + |a_{33}| \leqslant 1$.

[La matrice A è tale che la somma dei valori assoluti delle sue entrate dà al più 1. Quindi si ottiene o la matrice nulla (che ha somma 0) oppure le matrici che hanno un'entrata uguale ad 1 o -1 e tutte le altre entrate nulle (esse hanno somma 1). Si hanno così in diciannove matrici in tutto.]

Esercizio 15. Provare (con un controesempio) che per le matrici non valgono in generale le ben note formule $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ e $(A+B)(A-B) = A^2 + B^2$. Esibire poi dei casi particolari in cui tali formule sono valide.

Esercizio 16. È ben noto che per i numeri reali vale la legge di annullamento del prodotto, cioè dati $x, y \in \mathbb{R}$, se $xy = 0$ allora $x = 0$ oppure $y = 0$. Si può affermare che la stessa proprietà vale per le matrici?