Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.1 – Logica e insiemistica

Esercizio 1. Si indichino con c i cani, con u gli uomini e con $p(c, u)$ il predicato 'c è amico di u'. Usando il linguaggio simbolico, riscrivere le frasi p_1 ='Ogni cane è amico di qualche uomo' e p_2 ='C'è solo un cane amico di tutti gli uomini'.

Usando il linguaggio comune, riscrivere gli enunciati

(i) $q_1 = \exists\ c\ \exists!\ u : p(c,u)$;

(ii) $q_2 = \exists\ c\ \exists\ u : p(c,u)$;

(iii) $q_3 = \forall\ c\ \forall\ u : p(c,u)$.

[Le prime due frasi diventano $p_1 : \forall\ c\ \exists\ u : p(c,u)$ e $p_2 : \exists!\ c\ \forall\ u : p(c,u)$. Le altre tre proposizioni diventano q_1 ='C'è un cane che è amico di un uomo soltanto', q_2 ='C'è un cane che è amico di un uomo' e q_3 ='Tutti i cani sono amici di tutti gli uomini'.]

Esercizio 2. Spiegare perché è falsa la seguente affermazione: 'Se n è un numero negativo, allora anche $n+3$ è negativo.'

[Questo enunciato può essere riformulato come un predicato nella variabile n. Ad esempio $p(n) : \forall$ numero negativo n anche il numero $n+3$ è negativo. Così riformulato è più facile negarlo e mostrare quindi che è falso. Per quanto abbiamo imparato sopra, per negare il $\forall$ dobbiamo esibire almeno un numero n che è negativo, ma tale che $n+3$ è positivo. Ad esempio $n = -2$ fa al caso nostro poiché $n+3 = 1$ che è un numero positivo.]

Esercizio 3. Usando il linguaggio matematico, riscrivere la seguente proposizione: 'Non c'è un luogo in cui piove ogni giorno'.

[Indichiamo con g i giorni, con l i luoghi e con $p(g,l)$ il predicato 'Nel giorno g piove nel luogo l'. Allora la frase della traccia diventa: $\overline{\exists\ l\ \forall\ g : p(g,l)}$. Ricordando come si negano i quantificatori più semplicemente otteniamo la formulazione $\forall\ l\ \exists\ g : \overline{p(g,l)}$ che si legge 'In ogni luogo c'è un giorno in cui non piove'.]

Esercizio 4. Dimostrare la seguente proposizione 'Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, allora n non è multiplo di 10'. Formulare l'implicazione contronominale, inversa e contraria. Stabilire se è vera l'implicazione inversa.

[Per comodità conviene provare la contronominale che dice 'Se n è multiplo di 10, allora n è pari'. Ciò è vero poiché se $n = 10m$, per qualche intero m, allora vale anche $n = 2(5m)$ che è un numero pari. La proposizione inversa è 'Se n non è multiplo di 10, allora n è dispari'(che è falsa). La contraria è 'Se n è pari, allora n è multiplo di 10'(falsa anche questa).]

Esercizio 5. Siano p: 'ABC è un triangolo rettangolo' e q: 'ABC è un triangolo scaleno'. Scrivere il contenuto delle espressioni $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \wedge \overline{q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{\overline{q}}$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \overline{q}$.

[Nell'ordine si ottengono le proposizioni: $\overline{p}$:'Il triangolo ABC non è rettangolo'; $p \wedge q$:'Il triangolo ABC è rettangolo e scaleno'; $p \vee q$:'Il triangolo ABC è rettangolo o scaleno'; $p \wedge \overline{q}$:'Il triangolo ABC è rettangolo e non è scaleno'; $\overline{p} \vee \overline{q}$:'Il triangolo ABC o non è rettangolo o non è scaleno'; $\overline{\overline{q}}$:'Non è che il triangolo ABC non è scaleno'; $p \Rightarrow q$:'Se il triangolo ABC è rettangolo, allora è scaleno'; $q \Rightarrow \overline{q}$:'Se il triangolo ABC è scaleno, allora non è scaleno'.]

Esercizio 6. Siano date p e q proposizioni. Costruire le tabelle di verità di $\overline{p} \vee q$; $(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$; $q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$.

[Si ottiene la tabella

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$	$q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

]

Esercizio 7. Siano $A = \{ a, 1, 2, 3, b, 4 \}$, $B = \{ a, c, 1, 2 \}$ e $C = \{ b, 3, d, 5 \}$. Calcolare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $B \cap C$, $(A \cap C) \cup B$, $B \setminus C$ e $C \setminus A$.

[Si ha che $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, a, b, c \}$, $A \cap B = \{ a, 1, 2 \}$, $A \cup B \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d \}$, $A \cap B = \{ a, 1, 2 \}$, $B \cap C = \varnothing$, $(A \cap C) \cup B = \{ a, b, c, 1, 2, 3 \}$, $B \setminus C = B$ ed infine $C \setminus A = \{ d, 5 \}$.]

Esercizio 8. Siano dati gli insiemi $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ \varnothing, x \}$. Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$.

[Si ha che $\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$ e $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{ x \}, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, x \} \}$.]

Esercizio 9. Siano dati gli insiemi $A = \{ a, b \}$ e $B = \{ 0, 1 \}$. Calcolare $A \times B$ e $B \times A$. Sono uguali questi due insiemi?

[Si ha che il primo insieme $A \times B = \{ (a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1) \}$ e che $B \times A = \{ (0, a), (0, b), (1, a), (1, b) \}$. I due insiemi sono diversi poiché ad esempio la coppia $(a, 1)$ è un elemento del primo insieme ma non del secondo.]

Esercizio 10. A partire dalle leggi di De Morgan per la logica, dedurre le leggi di De Morgan per l'insiemistica.

[Siano dati gli insiemi A e B. Vogliamo provare che $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Consideriamo i predicati $p(x) : x \in A$ e $q(x) : x \in B$. Allora $p(x)$ è verificato da tutti e soli gli elementi di A, $q(x)$ da tutti e soli quelli di B. Prendiamo un elemento $x \in \overline{A \cup B}$. Questo equivale a dire che è vera la proposizione $\overline{p(x) \vee q(x)}$. Per la seconda legge di De Morgan della logica, a sua volta questa proposizione è equivalente a $\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}$. Infine, quest'ultima proposizione è equivalente a dire che $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Segue l'uguaglianza voluta dei due insiemi. La prima legge di De Morgan si mostra allo stesso modo.]

Esercizio 11. Siano date p e q proposizioni. Dimostrare che vale la seguente equivalenza:

$$\overline{\overline{p} \wedge q} \vee p \Leftrightarrow \overline{q} \vee p.$$

[In maniera semplice questa equivalenza può essere provata usando le tavole di verità. Più elegantemente, ragioniamo come segue usando le proprietà dimostrate. Partiamo da $\overline{\overline{p} \wedge q}$. Per la prima legge di De Morgan essa diventa $\overline{\overline{p}} \vee \overline{q} \Leftrightarrow p \vee \overline{q}$, cancellando poi la doppia negazione. Sicché la proposizione di partenza diventa $(p \vee \overline{q}) \vee p$. Infine sfruttando nell'ordine le proprietà commutativa, associativa e la legge di idempotenza si ha il risultato finale: $(p \vee \overline{q}) \vee p \Leftrightarrow (\overline{q} \vee p) \vee p \Leftrightarrow \overline{q} \vee (p \vee p) \Leftrightarrow \overline{q} \vee p$.]

Esercizio 12. Siano date p e q proposizioni. Dimostrare che le seguenti implicazioni sono tautologie: $p \Rightarrow (p \vee q)$ e $(p \wedge q) \Rightarrow p$. Esse sono dette rispettivamente il *passaggio all'alternativa* ed il *principio di scelta*. Si faccia un esempio per entrambe. Dedurne che anche $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ è una tautologia.

[Dalle seguenti tabelle si vede che sono implicazioni sempre vere:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Come esempio del passaggio all'alternativa si pensi a 'Se un numero è minore di 5, allora è anche minore o uguale a 5'. Per il principio di scelta si ha ad esempio 'Se ABC è un triangolo sia rettangolo che isoscele, allora è in particolare un triangolo isoscele'. L'ultima implicazione segue dalla proprietà transitiva dell'implicazione.]

Esercizio 13. Determinare l'insieme delle parti dell'insieme $A = \{ a, b, \{ c, d \} \}$.

[I sottoinsiemi di A sono: $\varnothing$, $\{ a \}$,$\{ b \}$, $\{ \{ c, d \} \}$, $\{ a, b \}$, $\{ a, \{ c, d \} \}$, $\{ b, \{ c, d \} \}$, $\{ a, b, \{ c, d \} \}$]

Esercizio 14. Siano dati gli insiemi $A = \{ x, y, 1 \}$, $B = \{ x, 1 \}$ e $C = \{ 1, y \}$. Calcolare gli insiemi $(A \times B) \cap (A \times C)$ e $A \times (B \cap C)$. Verificare che sono uguali.

[Sono entrambi uguali all'insieme $\{ (x, 1), (y, 1), (1, 1) \}$.]

Esercizio 15. Per ciascuna delle seguenti coppie di insiemi A e B trovare, se possibile, un insieme C che è disgiunto da B ma non da A:

(i) $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 1 \}$

(ii) $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 1, 4 \}$

(iii) $A = \{ 1, 2 \}$ e $B = \{ 1, 2, 5 \}$

[Nei primi due casi ad esempio si possono considerare i seguenti insiemi: $C_{(i)} = \{ 3 \}$ e $C_{(ii)} = \{ 2 \}$. Nel terzo caso è impossibile perché A è sottoinsieme di B, quindi tutto ciò che interseca A, interseca anche B.]

Esercizio 16. Dire a quale delle seguenti proposizioni è equivalente: 'Non tutte le mele sono dolci'

(i) Qualche mela è dolce.

(ii) Tutte le mele non sono dolci.

(iii) Almeno una mela non è dolce.

(iv) Nessuna mela è dolce.

(v) Qualsiasi mela è dolce.

[c)]

Esercizio 17. A quale delle seguenti è equivalente la negazione della frase 'In ogni città c'è solo una curva pericolosa'?

(i) Tutte le curve di Roma sono pericolose.

(ii) C'è una città in cui nessuna o tutte le curve sono pericolose.

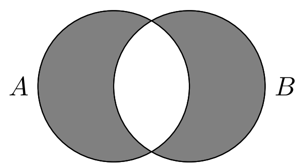
(iii) Non esiste una città con una curva pericolosa.

(iv) A Parigi non ci sono curve pericolose.

(v) In ogni città tutte le curve sono pericolose.

[b)]

Esercizio 18. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(i) $A \cap B$;

(ii) $(A \setminus B) \cup B$;

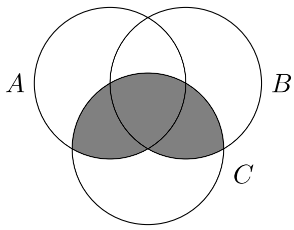
(iii) $A \cup B$;

(iv) $(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$;

(v) $(A \cap B) \smallsetminus A$.

[d)]

Esercizio 19. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(i) $A \cap B \cap C$;

(ii) $(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus C)$;

(iii) $(A \cup B) \smallsetminus C$;

(iv) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(v) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

[d)]

Esercizio 20. Sia dato l'insieme $A = \{ x, y, z \}$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(ii) $\varnothing \subset \{ x \}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(iii) $\varnothing \in A$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(iv) $A \cup A = \{ 2x, 2y, 2z \}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(v) $A = \{ x \} \cup \{ y \} \cup \varnothing \cup \{ z \}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(vi) $y \in \mathcal{P}(A)$ ed $y \in A$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

(vii) $A = \{ x, y \} \cup \{ y, z \} \cup \{ z, x \}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

[$\boxed{V}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\boxed{F}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\boxed{V}$]

Esercizio 21. Sia $A = \{a\}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) $a \in A$ [V]

(ii) $a \subseteq A$ [F]

(iii) $\{a\} \subseteq A$ [V]

(iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ [V]

(v) $\{\varnothing\} \in A$ [F]

(vi) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ [V]

(vii) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(A)$ [F]

(viii) $a \in \mathcal{P}(A)$ [F]

(ix) $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ [F]

(x) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ [V]

Esercizio 22. Ripetere l'esercizio 21 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ a\}$.

Esercizio 23. Ripetere l'esercizio 21 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ a,\ \{a\}\}$.

Esercizio 24. Ripetere l'esercizio 21 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ \{\varnothing,\ a\}\}$.

Esercizio 25. siano A e B insiemi. Sia $X \subseteq A \times B$. È vero che esistono due sottoinsiemi $S \subseteq A$ e $T \subseteq B$ tali che $X = A \times B$?

Esercizio 26. Siano dati gli insiemi $A = \{\, a, b, 0, 1, 2, * \,\}$, $B = \{\, a, c, *, 1 \,\}$, $C = \{\, b, c, 0, 3 \,\}$ e $D = \varnothing$. Calcolare:

(i) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

(ii) $[(A \cap B) \cap (C \cup D)] \setminus (A \cup B)$;

(iii) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D)$.

Esercizio 27. Siano A, B insiemi. Dimostrare che

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Esercizio 28. Siano A, B insiemi. Dimostrare che

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

Provare che in generale l'inclusione è stretta, cioè che non vale l'inclusione contraria.

Esercizio 29. Siano A, B insiemi. Stabilire se è vero che

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$$