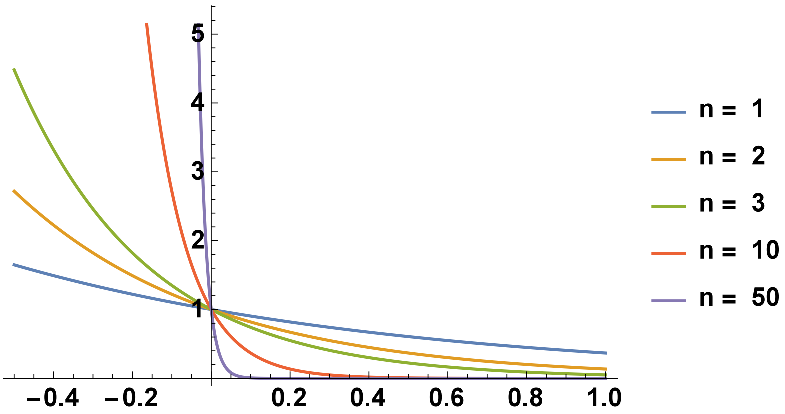
Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.1 – Successioni di funzioni

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti successioni di funzioni studiare la convergenza puntuale ed uniforme:

(i) $f_n(x) = e^{-nx}$

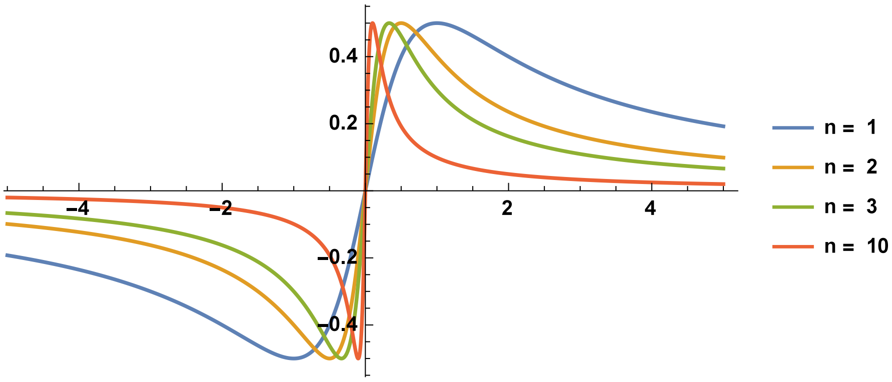
[Il limite puntuale è la funzione discontinua $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ definita sull'intervallo $[0, +\infty)$. Si noti che per $x < 0$ la successione diverge positivamente. Si ha convergenza uniforme su tutti gli intervalli di tipo $(a, +\infty)$, con $a > 0$. In tali intervalli si ha che $\sup_{x\in(a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = e^{-na} \to 0$ per $n \to +\infty$. In figura vi sono alcuni dei grafici delle f_n:



]

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2 + 1}$

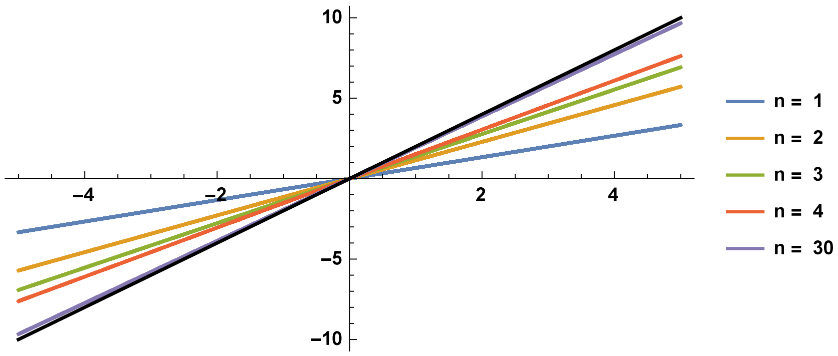
[Per $x = 0$ la successione $f_n(0)$ è costantemente nulla. Fissato $x \neq 0$, la successione numerica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ si comporta asintoticamente come $\{\frac{1}{nx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a 0 per $n \to +\infty$. Il limite puntuale è quindi la funzione nulla definita su $\mathbb{R}$. Ci chiediamo ora se la convergenza sia uniforme. Per ogni n calcoliamo l'estremo superiore della funzione $g_n \overset{\text{def}}{=} |f_n - 0| = |f_n|$. Abbiamo che $f_n'(x) = \frac{n-n^3x^2}{(n^2x^2+1)^2} \geqslant 0$ per $-\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$. Sicché l'estremo superiore di g_n è anche massimo assoluto e vale costantemente $g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Siccome $\sup_{\mathbb{R}} |g_n| = \dfrac{1}{2} \not\to 0$, la convergenza non è uniforme. Sugli insiemi di tipo $(-\infty, -a)$ o $(a, +\infty)$, con $a > 0$, la convergenza è invece uniforme. Infatti, su insiemi di tal tipo il massimo assoluto di $g_n = |f_n|$ è *definitivamente* assunto in corrispondenza di $x = \pm a$ e vale $g_n(\pm a) = \frac{na}{n^2a^2+1} \sim \frac{1}{na} \to 0$. In figura sono illustrati i grafici di alcune delle f_n, si noti che i valori massimi e minimi da esse assunti sono uguali in valore assoluto a $\frac{1}{2}$.



]

(iii) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{n^2+n+1}$

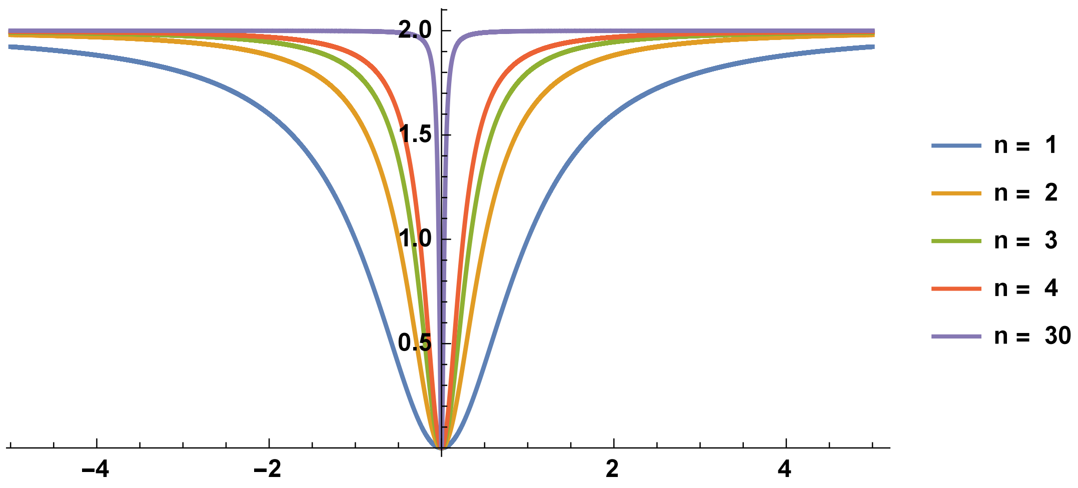
[Il limite puntuale della successione è la funzione $f(x) = 2x$ definita su tutto l'insieme $\mathbb{R}$. La convergenza non è ivi uniforme. Per vedere ciò, consideriamo la funzione $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |\frac{2n^2x}{n^2+n+1} - 2x| = |\frac{-2(n+1)x}{n^2+n+1}| = \frac{2(n+1)|x|}{n^2+n+1}$. Poiché la funzione è pari (rispetto ad x s'intende), basta cercare il suo *sup* in $(0, +\infty)$ (il valore assoluto è così superfluo). Siccome $g_n'(x) = \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} \geqslant 0$ definitivamente, abbiamo che le g_n non sono limitate superiormente in $\mathbb{R}$, pertanto la convergenza non è uniforme. Se prendiamo invece domini del tipo $(-a, a)$, con $a > 0$, la convergenza è uniforme. Infatti le g_n assumono il proprio estremo superiore in corrispondenza di $x = a$, esso vale $g_n(a) = \frac{2(n+1)a}{n^2+n+1}$ che è un infinitesimo per $n \to +\infty$.



]

(iv) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x^2}{n^2x^2+1}$

[La successione converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione costante $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0. \end{cases}$ Poiché la funzione limite non è continua, la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$. Infatti, detta $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{n^2x^2+1}$, abbiamo che $g_n'(x) = \frac{-4n^2x}{(n^2x^2+1)^2}$. Ne discende che le g_n definite su $\mathbb{R}$ hanno un punto di massimo assoluto in $x = 0$. Siccome $g_n(0) = 2 \not\to 0$, per $n \to +\infty$, la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$ come ci aspettavamo. La discontinuità di f in $x = 0$, ci suggerisce di escludere lo zero dagli insiemi di convergenza. Su insiemi della forma $(-\infty, a)$ o $(a, +\infty)$, con $a > 0$ la convergenza delle f_n ad f è uniforme. Per vedere ciò, dall'analisi precedente, troviamo che le g_n assumono il loro massimo per $x = a$ o $x = -a$ rispettivamente. Si ha infine che $g_n(a) = g_n(-a) = \frac{2}{n^2a^2+1} \to 0$ per $n \to +\infty$.



]

(v) $f_n(x) = log\,\dfrac{nx^2}{n^2+1}$ [non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$]

(vi) $f_n(x) = e^{-nx^2}$

(vii) $f_n(x) = e^{-n|x|}$

(viii) $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$

(ix) $f_n(x) = e^{\frac{|x|}{n}}$

(x) $f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}}$

(xi) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

Esercizio 2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su $\mathbb{R}$ come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leqslant x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[La successione converge puntualmente a 0 su $\mathbb{R}$. La convergenza è uniforme sugli intervalli di tipo $(-\infty, a)$, per ogni $a > 0$. Infatti, preso $\overline{n}$ il minimo intero naturale maggiore di a, si ha che per ogni $n \geqslant \overline{n}$, $\sup\limits_{x\in(-\infty-a)} \{|f_n(x) - 0|\} = 0$ che converge banalmente a 0.]

Esercizio 3. È data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su $[0,1]$ come

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \frac{1}{2n} \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

[Preso $x \in [0,1]$, sia ν il più piccolo intero positivo per cui $\frac{1}{\nu} < x$. Sicché per ogni $n \geqslant \nu$ si ha che $f_n(x) = 0$. Allora il limite puntuale della successione è la funzione costantemente nulla.]

(ii) Stabilire se la convergenza è uniforme ed in caso contrario determinare insiemi massimali contenuti in $[0,1]$ su cui la convergenza è uniforme.

[La convergenza non è uniforme su $[0,1]$ poiché $\sup_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - 0|\} = \sqrt{n} \not\to 0$. Presi invece intervalli di tipo $(a,1]$, con $a > 0$, la convergenza delle f_n alla funzione nulla è uniforme. Sia ν il più piccolo intero positivo per cui $\frac{1}{\nu} < a$. Allora per ogni $n \geqslant \nu$ si ha che $f_n(x) = 0$. Banalmente si ha che $\sup_{x\in(a,1]} \{|f_n(x) - 0|\} = 0 \to 0$.]

(iii) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

[Si ha che $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}dx = \sqrt{n}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$. Si osservi che esso coincide con $\int_0^1 f(x)dx$ sebbene la convergenza non sia uniforme.]

Esercizio 4. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione delle funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite come $f_n(x) = (x^2 - x)^n$, con $x \in [0,1]$. Studiare poi la convergenza delle derivate prime e degli integrali delle f_n sull'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 5. Provare che l'insieme di convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = log(nx^2 + 1)$$

ha insieme di convergenza puntuale ridotto ad un solo punto.

Esercizio 6. È data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite su $[0,1]$ come

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n).$$

(i) Determinare il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

[Il limite puntuale è la funzione $f(x)$ costantemente nulla.]

(ii) Stabilire se la convergenza è uniforme ed in caso contrario determinare insiemi massimali contenuti in $[0,1]$ su cui la convergenza è uniforme.

[La convergenza non è uniforme su $[0,1]$. Le f_n hanno un massimo assoluto per $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ che vale costantemente $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$. Sicché $\sup_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - 0|\} = \dfrac{1}{4} \not\to 0$.

Presi invece intervalli di tipo $[0,a]$, con $0 < a < 1$, la convergenza delle f_n alla funzione nulla è uniforme. Infatti le f_n assumono definitivamente il loro estremo superiore in corrispondenza di $x = a$ e tale estremo superiore converge a zero per $n \to +\infty$.]

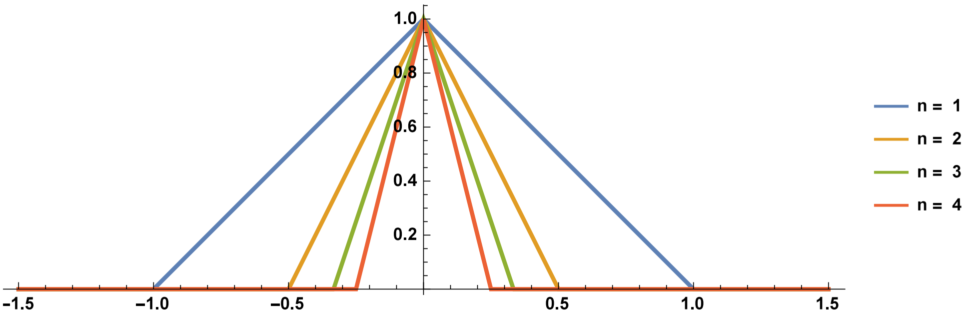
(iii) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

[Si ha che $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \to 0$. Si osservi che esso coincide con $\int_0^1 f(x)dx$ sebbene la convergenza non sia uniforme.]

Esercizio 7. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$ come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

[Il limite puntuale è la funzione discontinua $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ La convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$ ma su intervalli del tipo $(-\infty, -a)$ o $(a, +\infty)$, con $a > 0$.

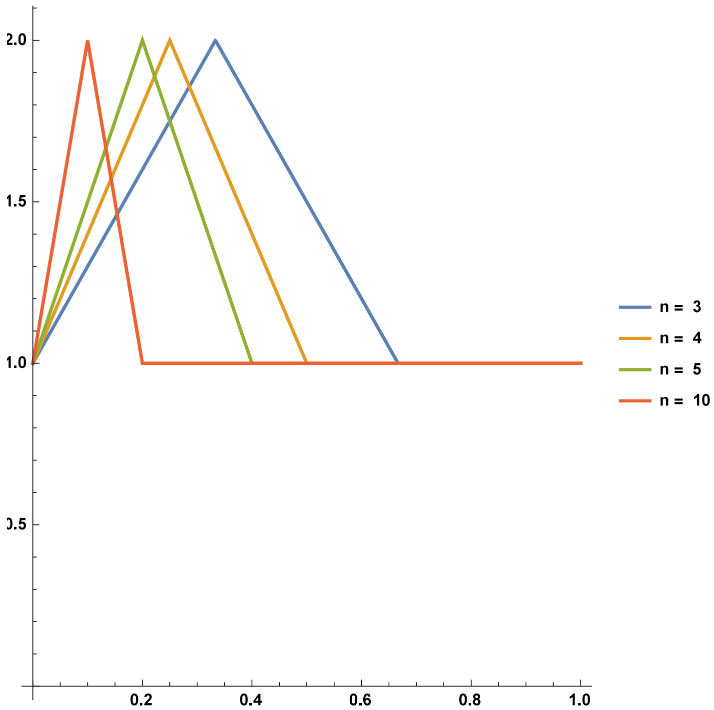


]

Esercizio 8. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione delle funzioni $\{f_n\}_{n\geqslant 3}$ definite su $\mathbb{R}$ come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n} \\ 1 & \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Stabilire inoltre se vale la formula dello scambio tra limite ed integrale esteso a $[0,1]$.
[Il limite puntuale è la funzione costante $f(x) = 1$, per ogni $x \in [0,1]$. La convergenza non è uniforme su $[0,1]$ ma su intervalli del tipo $(a,1]$.



]

Esercizio 9. Stabilire se è possibile applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata alla successione di funzioni $f_n(x) = x^2 + \frac{x}{n}$.