

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.20 – Sfere e circonferenze nello spazio

Esercizio 1. Quali tra le seguenti equazioni rappresentano una sfera? Se ne determini centro e raggio:

(i) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 4y + z + 10 = 0.$

(ii) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}x + 3y - z - 1 = 0.$

(iii) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 7 = 0.$

(iv) $S: x^2 + y^2 + z^2 + x + y - z + 4 = 0.$

Esercizio 2. Determinare raggio e centro della sfera $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 4 = 0.$

Esercizio 3. Determinare raggio e centro della sfera $S: x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 1 = 0.$

Esercizio 4. Determinare centro e raggio della circonferenza:

$$C: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Per quali valori di h il piano $x + y + z = h + 1$ interseca la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ in una circonferenza?

Esercizio 6. Sia S la sfera di centro il punto $(1, 1, 1)$ e raggio $\sqrt{3}$. Determinare il piano tangente alla sfera nel punto $(2, 2, 2)$.

Esercizio 7. Si diano quattro punti non complanari nello spazio e si trovi la sfera che li contiene.

Esercizio 8. Determinare la circonferenza di \mathbb{E}^3 passante per i punti $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ e $C(1, 1, 0)$.

Esercizio 9. Al variare di k in \mathbb{R} dire se il piano $\pi: x - y + z = k$ è tangente, secante o esterno alla sfera di equazione $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2kx + 2y - 2z + 2 = 0$. Calcolare raggio e centro della circonferenza che si ottiene per $k = 1$.

[è tangente per $k = 4 \pm 2\sqrt{3}$
è esterno per $k < 4 - 2\sqrt{3}$ o $k > 4 + 2\sqrt{3}$
è secante per $4 - 2\sqrt{3} < k < 4 + 2\sqrt{3}$]

Esercizio 10. Determinare centro e raggio della circonferenza data dall'intersezione delle due sfere: $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ed $S': x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4 = 0$.

Esercizio 11. Determinare centro e raggio della circonferenza data dall'intersezione delle due sfere: $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 7$ ed $S': x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

Esercizio 12. Per quali valori di k le sfere $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z = k^2 - 11$ ed $S': x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ hanno intersezione non vuota?

[per $\sqrt{5} - 2 \leq k \leq \sqrt{5} + 2$]

Esercizio 13. Classificare la posizione reciproca tra le sfere $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2kx - 2y + k^2 - 3 = 0$ ed $S': x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 2 - k^2 = 0$.

[perché la seconda equazione definisca una sfera deve essere $k > 0$, si trova allora per tali valori di k che le sfere sono sempre disgiunte ed una esterna all'altra]

Esercizio 14. Sono dati nello spazio i punti $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ e $C(0, 0, -2)$.

(i) Determinare tutte le sfere passanti per A, B e C .

(ii) Determinare le sfere di raggio 2 passanti per A, B e C .

(iii) Determinare la circonferenza passante per A, B e C .

Esercizio 15. Determinare la sfera di centro $C(1, -1, 0)$ e tangente alla retta r :
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 16. Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 3z + 7 = 0$ nel punto $A(2, -1, 1)$.

$$[2x + 4y - z + 1 = 0]$$