Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.21 – Spazio euclideo

Esercizio 1. Siano dati i punti $A(1,1,-1)$, $B(k,-1,1)$, $C(-1,2,3)$ e $D(-2,0,k)$. Siano r la retta passante per A e B ed s la retta passante per C e D.

(i) Determinare i valori di k per cui i quattro punti sono allineati.

(ii) Determinare i valori di k per cui i quattro punti sono complanari.

(iii) Determinare i valori di k per cui r ed s sono parallele.

(iv) Determinare i valori di k per cui r ed s sono ortogonali.

(v) Determinare i valori di k per cui r ed s sono ortogonali e incidenti.

(vi) Determinare i valori di k per cui r ed s sono coincidenti.

(vii) Determinare i valori di k per cui r ed s sono sghembe. Scelto un valore di k tra quelli trovati, si calcoli la distanza tra r ed s.

Esercizio 2. Verificare che le rette $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ sono sghembe ed ortogonali. Calcolare la distanza tra di esse e determinare la perpendicolare comune.

Esercizio 3. Verificare che la retta $s : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ non è contenuta nel piano $\pi : \ 2x + y - z + 5 = 0$. Cercare in π una retta r che sia sghemba con s. Determinare, se esiste, un piano π parallelo a r, contenente r e ortogonale ad s.

Esercizio 4. Determinare la retta r passante per i punti $P(-1,1,1)$ e $Q(0,1,0)$. Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} -x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$ Se r ed s sono sghembe, trovare la loro distanza e la perpendicolare comune. Calcolare inoltre il coseno dell'angolo formato da r ed s. Determinare infine il piano σ contenente r e parallelo ad s.

Esercizio 5. Determinare il piano π perpendicolare alla retta $r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ e passante per $Q(2,1,-1)$. Calcolare a distanza di Q da r e di Q da π.

Esercizio 6. Costruire un piano σ parallelo al piano $\pi : \ 2x - y + 3z - 5 = 0$ e distante da questo 2. È unico tale piano?

Esercizio 7. Stabilire se le seguenti coppie di rette sono parallele o sghembe e determinare la distanza tra esse:

(i) $r : \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(ii) $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$

(iii) $s : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(iv) $r : \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

(v) $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$

Esercizio 8. Verificare che il piano $\pi :\ 4x - 5y + 4z + 2 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ sono paralleli e determinare la loro distanza. Trovare un piano perpendicolare a π e contenente la retta r.

Esercizio 9. Verificare che i piani $\pi : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t' + t \\ z = t' \end{cases}$ e $\sigma : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t' \\ z = t - t' + \frac{3}{4} \end{cases}$ sono paralleli e calcolare la loro distanza.

Esercizio 10. Si dimostri la formula data a lezione per il calcolo della distanza di un punto da un piano.

Esercizio 11. Verificare che la retta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\alpha :\ x - y + z - 1 = 0$ sono incidenti. Determinare il loro punto comune.

Esercizio 12. Siano date le rette $r : \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} x - y - 1 = 0. \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$ Verificare che r ed r' sono sghembe. Calcolare la distanza di r da r' e determinare la perpendicolare comune s. Trovare il piano π parallelo ad r e contenente r' ed il piano π' parallelo ad r' e contenente r. Verificare che $\pi \cap \pi' = s$.

Esercizio 13. Determinare l'equazione dei piani che distano 1 dal piano $\pi :\ x - 2y + 3z + 4 = 0$.

Esercizio 14. Verificare che le rette $r : \begin{cases} x = t + 5 \\ y = -t \\ z = -t - 7 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ sono complanari. Determinare il piano π che le contiene. Trovare una retta sghemba con r ed incidente e ortogonale ad s.

Esercizio 15. Mostrare che la retta $r : \begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ 2y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ forma angoli uguali con gli assi coordinati.

Esercizio 16. Determinare il piano π passante per $A(-1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani $\sigma :\ 3x - y + 2z - 8 = 0$ e $\sigma' :\ x + 4y - 3z + 1 = 0$. Calcolare la distanza di A da σ e σ'.

Esercizio 17. Determinare il volume del parallelepipedo P sotteso dai vettori $u = (1, 1, 1)$, $v = (-2, 1, 0)$ e $w = (0, 1, -2)$. Trovare due vettori v' e w' tali che il volume del parallelepipedo P' sotteso dai vettori u, v' e w' sia il doppio del volume di P.