Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.25 – Regola dei segni
prof. Cigliola

Esercizio 1. Per ciascuno dei seguenti polinomi a coefficienti reali, contare il numero di radici reali nulle, positive e negative ed il numero di radici complesse:

(i) $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 18$

(ii) $f(x) = 101x^5 + 27x^4 - x^2 + 3$

(iii) $f(x) = 12x^6 + x^3 - 2x^2$

(iv) $f(x) = x^8 - x + 2$

(v) $f(x) = x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

(vi) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

(vii) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 28x^2 + 32x$

Esercizio 2. Dimostrare che se un polinomio di grado 4 ha radici tutte reali, allora non può avere nemmeno un coefficiente nullo.

Esercizio 3. Calcolare la segnatura delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^4$:

(i) $Q(x, y, z, t) = x^2 - y^2 + zt + xt - 2zy$

(ii) $Q(x, y, z, t) = xy - xz + xt - yz + zt + 2yt$

(iii) $Q(x, y, z, t) = x^2 - yz - t^2$

(iv) $Q(x, y, z, t) = 3y^2 + xt$

(v) $Q(x, y, z, t) = -4xy + 2zt$

(vi) $Q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + y^2$

(vii) $Q(x, y, z, t) = 3x^2 - 2y^2 + xy - 4zt$

Esercizio 4. Si consideri la seguente applicazione $Q : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $Q(ax^2 + bx + c) = 2ac + b^2$.

(i) Determinare la forma bilineare polare di Q.

(ii) Calcolare la matrice canonica di Q.

(iii) Determinare una base diagonalizzante per Q.

(iv) Determinare una base di Sylvester per Q.

(v) Calcolare rango e segnatura di Q utilizzando la regola di Cartesio.

Esercizio 5. Si consideri la seguente applicazione $Q : \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_3.$$

(i) Determinare la forma bilineare polare di Q.

(ii) Calcolare la matrice canonica di Q.

(iii) Determinare una base diagonalizzante per Q.

(iv) Determinare una base di Sylvester per Q.

(v) Calcolare rango e segnatura di Q utilizzando la regola di Cartesio.

Esercizio 6. Si consideri l'applicazione $b : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(f(x),\ g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(i) Verificare che b è un prodotto scalare.

(ii) Determinare la forma quadratica associata a b.

(iii) Calcolare la segnatura di Q e determinare una sua forma canonica di Sylvester.

Esercizio 7. Utilizzando la regola di Cartesio e il criterio dei minori principali, verificare che ponendo

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$$

si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 8. Utilizzando la regola di Cartesio e il criterio dei minori principali, verificare che ponendo

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_3y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$$

si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.