

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016 – prof. Cigliola
Foglio n.26 – Piano proiettivo

Esercizio 1. Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta proiettiva passante per le seguenti coppie di punti:

(i) $P[1, 2, -1]$ e $Q[-1, -2, -3]$ $[8X_1 - 4X_2 + X_0 = 0,$ $\begin{cases} X_1 = t + s \\ X_2 = 2t + 2s \\ X_0 = -t + 3s \end{cases}$]

(ii) $P[1, 0, 0]$ e $Q[-1, -2, 1]$ $[X_2 + 2X_0 = 0,$ $\begin{cases} X_1 = t + s \\ X_2 = 2s \\ X_0 = -s \end{cases}$]

(iii) $P[0, 2, 0]$ e $Q[-1, 0, 0]$ $[X_0 = 0,$ $\begin{cases} X_1 = t \\ X_2 = s \\ X_0 = 0 \end{cases}$]

(iv) $P[11, 22, 11]$ e $Q[0, 2, 3]$

(v) $P[2, 2, -1]$ e $Q[1, -1, 0]$

Esercizio 2. Stabilire se i seguenti punti sono allineati e in caso affermativo determinare la retta proiettiva che li contiene:

(i) $A[1, 2, -1]$, $B[-1, -2, -3]$ e $C[0, 0, 1]$ $[$ allineati, $2X_1 - X_2 = 0]$

(ii) $A[1, 2, -1]$, $B[1, 1, 1]$ e $C[3, 4, 1]$ $[$ allineati, $3X_1 - 2X_2 - X_0 = 0]$

(iii) $A[1, 1, -1]$, $B[0, 2, 2]$ e $C[1, 2, 0]$ $[$ allineati, $X_1 - X_2 + X_0 = 0]$

(iv) $A[1, -1, 1]$, $B[-1, 1, 1]$ e $C[1, 0, 1]$ $[$ non allineati]

(v) $A[-1, -1, -1]$, $B[1, 1, 1]$ e $C[0, 0, 1]$ $[A = B,$ allineati, $X_1 - X_2 = 0]$

Esercizio 3. Determinare il punto comune alle seguenti coppie di rette:

(i) $r : X_0 + X_1 - X_2 = 0$ e $s : X_1 - X_2 - X_0 = 0$

(ii) $r : 2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$ e $s : X_1 - 2X_2 - X_0 = 0$

(iii) $r : X_0 + X_1 + X_2 = 0$ e $s : X_2 + X_0 = 0$ $[P = [0, -1, 1]]$

(iv) $r : -X_0 + X_1 - X_2 = 0$ e $s : 2X_1 - X_2 + 3X_0 = 0$ $[P = [4, 5, -1]]$

(v) $r : X_0 = 0$ e $s : X_1 - X_2 = 0$ $[s_\infty = [1, 1, 0]]$

Esercizio 4. Determinare, se esiste, il punto di intersezione delle rette:

$$r_1 : X_1 - X_2 + 3X_0 = 0 \quad r_2 : X_0 + X_1 - X_2 = 0 \quad r_3 : 5X_0 + X_1 + 3X_2 = 0.$$

$[$ le rette non sono concorrenti in uno stesso punto]

Esercizio 5. Determinare la chiusura proiettiva ed il punto all'infinito (rispetto ad X_0) delle seguenti rette di \mathbb{A}^2 :

(i) $r : x + 2y - 3 = 0$ $[X_1 + 2X_2 - 3X_0 = 0, P_\infty = [-2, 1, 0]]$

(ii) $r : \sqrt{2}x = 3$ $[\sqrt{2}X_1 - 3X_0 = 0, P_\infty = [0, 1, 0]]$

(iii) $r : x - y + 3000 = 0$ $[X_1 - X_2 + 3000X_0 = 0, P_\infty = [1, 1, 0]]$

(iv) $r : -x + 3y - 2 = 0$

(v) $r : 2x - 3y - 5 = 0$

Esercizio 6. Determinare un'equazione cartesiana della retta affine costituita dai punti propri delle seguenti rette proiettive:

(i) $r : 2X_1 - X_0 = 0$ $[2x - 1 = 0]$

(ii) $r : 4X_1 + X_0 - X_2 = 0$ $[4x - y + 1 = 0]$

(iii) $r : X_0 = -2X_1$

(iv) $r : 3X_1 - X_2 + 2X_0 = 0$ $[3x - y + 2 = 0]$

(v) $r : -5X_0 = 0$ $[$ la retta ha parte affine vuota $]$

Esercizio 7. Determinare il punto comune alle chiusure proiettive delle rette affini seguenti:

(i) $r : x + 2y = 0$ e $s : x + y + 3 = 0$ $[P = [-6, 3, 1]]$

(ii) $r : 2x + 2y = 19$ e $s : x + y + 3 = 0$ $[P = [1, -1, 0]]$

(iii) $r : 2y = 13$ e $s : 2y + 4 = 0$ $[P = [1, 0, 0]]$

(iv) $r : y = -\frac{3}{2}x + 3$ e $s : x - y - 2 = 0$ $[P = [2, 0, 1]]$

(v) $r : 2x - 2y = 0$ e $s : x - y + 2 = 0$ $[P = [1, 1, 0]]$