Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.28 – Polinomi in più variabili

Esercizio 1. Per ciascuno dei seguenti polinomi di $\mathbb{R}[x,y]$ indicare le componenti omogenee:

(i) $p(x,y) = 2x^2 + xy - 2x + 3y^2 - 2xy^2 + x^2y - 5y + 6$

$[p_3 = -2xy^2 + x^2y,$
$p_2 = 2x^2 + xy + 3y^2,$
$p_1 = -2x - 5y,$
$p_0 = 6]$

(ii) $p(x,y) = x^2 + x + y - 2xy^2 + 3x^3 + 2x^2y - 6$

(iii) $p(x,y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + xy^3 - 2y^4$ $[p_4 = p(x,y)]$

(iv) $p(x,y) = -4$ $[p_0 = p(x,y) = -4]$

(v) $p(x,y) = 3x^5 - 2x^2y + 2xy^2 + xy - 5x^2y^3 + 2x - y + 7$

$[p_5 = 3x^5 - 5x^2y^3,$
$p_4 = 0,$
$p_3 = -2x^2y + 2xy^2,$
$p_2 = xy,$
$p_1 = 2x - y,$
$p_0 = 7]$

Esercizio 2. Al variare di λ e μ in $\mathbb{R}$, calcolare il grado del seguente polinomio di $\mathbb{R}[x,y]$:

$$p(x,y) = (x^2 + x - 2\lambda y)(\mu x^2 y + \lambda x^2 - \mu)(\lambda x^3 + \mu xy^2 - 2y^3)$$

[se $\lambda = \mu = 0$ il polinomio è nullo e non ha grado definito
se $\mu \neq 0$ il grado è 8
se $\mu = 0$ e $\lambda \neq 0$ il grado è 7]

Esercizio 3. Omogenizzare rispetto alla variabile X_0 i polinomi dell'Esercizio 1.

[(i) $2X_1^2X_0 + X_1X_2X_0 - 2X_1X_0^2 + 3X_2^2X_0 - 2X_1X_2^2 + X_1^2X_2 - 5X_2X_0^2 + 6X_0^3$
(ii) $X_1^2X_0 + X_1X_0^2 + X_2X_0^2 - 2X_1X_2^2 + 3X_1^3 + 2X_1^2X_2 - 6X_0^3$
(iii) $2X_1^4 - 3X_1^2X_2^2 + X_1X_2^3 - 2X_2^4$
(iv) $-4X_0$
(v) $3X_1^5 - 2X_1^2X_2X_0^2 + 2X_1X_2^2X_0^2 + X_1X_2X_0^3 - 5X_1^2X_2^3 + 2X_1X_0^4 - X_2X_0^4 + 7X_0^5$]

Esercizio 4. Deomogenizzare i seguenti polinomi:

(i) $F(X_1,X_2,X_0) = X_0X_1 + 6X_2^2 + X_1^2 - 5X_1X_2$

(ii) $F(X_1,X_2,X_0) = X_1^5 - 2X_2^3X_0^2 - 2X_0^2X_1X_2^2 - X_0^4X_1 + X_2X_0^4$

(iii) $F(X_1,X_2,X_0) = 2X_0 - 3X_1 + X_2$

(iv) $F(X_1,X_2,X_0) = X_1^3 + X_2^3 + X_0X_1X_2 - 2X_0^2X_1$

(v) $F(X_1,X_2,X_0) = 12X_0$

Esercizio 5. Calcolare il gradiente dei polinomi dell'Esercizio 1.

[(i) $\nabla p = (-2 + 4x + y + 2xy - 2y^2,\ -5 + x + x^2 + 6y - 4xy)$
(ii) $\nabla p = (1 + 2x + 9x^2 + 4xy - 2y^2,\ 1 + 2x^2 - 4xy)$
(iii) $\nabla p = (8x^3 - 6xy^2 + y^3,\ -6x^2y + 3xy^2 - 8y^3)$
(iv) $\nabla p = (0,0)$
(v) $\nabla p = (2 + 15x^4 + y - 4xy + 2y^2 - 10xy^3,\ -1 + x - 2x^2 + 4xy - 15x^2y^2)$]

Esercizio 6. Calcolare il gradiente dei polinomi dell'Esercizio 4.

[(i) $\nabla F = (X0 + 2X1 - 5X2,\ -5X1 + 12X2,\ X1)$
(ii) $\nabla F = (-X0^4 + 5X1^4 - 2X0^2X2^2,\ X0^4 - 4X0^2X1X2 - 6X0^2X2^2,\ -4X0^3X1 + 4X0^3X2 - 4X0X1X2^2 - 4X0X2^3)$
(iii) $\nabla F = (-3,\ 1,\ 2)$
(iv) $\nabla F = (-2X0^2 + 3X1^2 + X0X2,\ X0X1 + 3X2^2,\ -4X0X1 + X1X2)$
(v) $\nabla F = (0, 0, 12)$]

Esercizio 7. Si consideri il polinomio $p(x, y) = 2x^3y^2 - 2x^2y + 2x^2y^2 + xy^2 - y^3 + 2x - 2y + 4$. Sia $P(X_1, X_2, X_0)$ il polinomio omogenizzato di $p(x, y)$. Verificare che i polinomi omogenizzati delle derivate parziali di $p(x, y)$ rispetto a x e y coincidono con le derivate parziali di $P(X_1, X_2, X_0)$ rispetto a X_1 e X_2.