Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.2 – Numeri reali

Esercizio 1. Dimostrare che $1 > 0$.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $-a = (-1) \cdot a$.

[Basta provare che il numero reale $(-1) \cdot a$ si comporta come l'opposto di a]

Esercizio 3. Dimostrare che $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale.

Esercizio 4. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} \leqslant 0.$$

[L'estremo superiore è 2, il massimo non esiste, l'estremo inferiore ed il minimo valgono -1]

Esercizio 5. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

[L'insieme A è costituito dalle frazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ... e dalle frazioni $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$, ... I numeri positivi sono tali che $\frac{1}{1} > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots$ mentre quelli negativi sono tali che $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{6} < \ldots$. Si deduce allora che $\max A = \sup A = 1$ e che $\min A = \inf A = -\frac{1}{2}$.]

Esercizio 6. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

[L'insieme dato è l'insieme dei numeri reali irrazionali. Esso è sia illimitato superiormente che inferiormente.]

Esercizio 7. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

[L'insieme dato è costituito dai numeri di tipo 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... Tali numeri sono compresi tra 0 ed 1. Pertanto $\max A = \sup A = 1$. Il numero 0 è invece un minorante ma non appartiene all'insieme. Siccome l'insieme A è limitato inferiormente, dobbiamo però cercare il suo estremo inferiore. Poiché al crescere di n, le frazioni di tipo $\frac{1}{10^n}$ diventano sempre più piccole rimanendo positive, ci viene da congetturare che $\inf A = 0$. Per provarlo rigorosamente utilizziamo la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Sia $\epsilon > 0$. dobbiamo provare che è possibile trovare un $n \in \mathbb{N}$ in corrispondenza del quale l'elemento $\frac{1}{10^n}$ è più piccolo di $0 + \epsilon$ e quindi 0 smette di essere il più grande dei minoranti di A. Dalla disequazione $0 + \epsilon = \epsilon > \frac{1}{10^n}$ si ricava che $n > \log \frac{1}{\epsilon}$. Basta quindi prendere un qualsiasi intero n più grande del logaritmo di $\frac{1}{\epsilon}$ per essere sicuri che $\epsilon > \frac{1}{10^n}$, pertanto $0 = \inf A$. Il minimo di A invece non esiste.]

Esercizio 8. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme costituito dai numeri decimali di tipo

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

dove ogni a_i si trova nell'insieme $I = \{0,\ 3,\ 7\}$.

[L'insieme ha come minimo il numero 0, ottenuto prendendo tutte le cifre dopo la virgola uguali a zero. Invece il massimo è il numero periodico $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$.]

Esercizio 9. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{6n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

[Gli elementi di A sono tutti maggiori o uguali a zero e inoltre $0 \in A$. Pertanto $0 = \inf A = \min A$. Proviamo ora che A è anche limitato superiormente. Esplicitamente, gli elementi di A sono $0,\ \frac{6}{2} = 3,\ \frac{12}{5},\ \ldots$. Possiamo osservare che tutti gli elementi di A sono minori o uguali a 3. Infatti si ha la seguente catena di equivalenze: $\frac{6n}{n^2+1} \leqslant 3 \iff 6n \leqslant 3n^2+3 \iff 2n \leqslant n^2+1 \iff n^2-2n+1 \geqslant 0 \iff (n-1)^2 \geqslant 0$. Se ne conclude che 3 è il massimo e l'estremo superiore di A.]

Esercizio 10. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

[L'insieme A ha minimo 2 ma non è limitato superiormente.]

Esercizio 11. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

Esercizio 12. Trovare, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ (-1)^n \cdot n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

[L'insieme A non è limitato né superiormente né inferiormente.]

Esercizio 13. Siano $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha < x < \beta$ e $\alpha < y < \beta$. Dimostrare che $|y - x| < \beta - \alpha$.

Esercizio 14. Sono dati gli insiemi

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{2n+1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}.$$

Provare che A e B sono classi separate e che esiste un unico elemento separatore per esse. Qual è l'elemento separatore?