

Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.31 – Coniche proiettive
prof. Cigliola

Esercizio 1. Classificare le seguenti coniche proiettive stabilendone il rango, un'equazione canonica, il tipo rispetto alla retta impropria $X_0 = 0$ (quando sono di rango 3) e determinare l'equazione della parte affine rispetto ad X_0 :

(i) $\mathcal{C} : X_0^2 + X_1^2 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$

(ii) $\mathcal{C} : X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$

(iii) $\mathcal{C} : X_0^2 + 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$

(iv) $\mathcal{C} : 4X_0X_1 - X_1^2 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 - X_2^2 = 0$

(v) $\mathcal{C} : 4X_0X_1 - X_1^2 + 2X_1X_2 - X_2^2 = 0$

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare (per rango e tipo) e trovare una forma canonica delle seguenti coniche proiettive:

(i) $\mathcal{C} : 2kX_1X_0 + X_0^2 + 6X_2X_0 + X_1^2 + 4X_1X_2 = 0$

(ii) $\mathcal{C} : 2kX_1X_0 + X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 4X_1X_2 = 0$

(iii) $\mathcal{C} : kX_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

(iv) $\mathcal{C} : 2kX_0X_1 + X_1^2 + 4X_2X_1 + X_2^2 = 0$

(v) $\mathcal{C} : 2kX_1X_0 + X_0^2 + 2X_2X_0 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = 0$

Esercizio 3. Trovare la forma canonica della chiusura proiettiva delle seguenti coniche affini, determinandone i punti impropri rispetto ad X_0 :

(i) $\mathcal{C} : x^2 + 2xy + 3y - 1 = 0$

(ii) $\mathcal{C} : 3xy + x - 4y + 2 = 0$

(iii) $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + x = 0$

(iv) $\mathcal{C} : x^2 + 4xy + 4x^2 + 1 = 0$

(v) $\mathcal{C} : 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$

Esercizio 4. Si considerino la conica affine $\mathcal{C} : x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 1 = 0$ e la conica proiettiva $\mathcal{D} : X_0^2 + 2X_0X_1 - X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$.

(i) Determinare la forma canonica affine \mathcal{C}_a di \mathcal{C} e trovare un'affinità f che trasforma \mathcal{C} in \mathcal{C}_a .

(ii) Determinare la forma canonica euclidea \mathcal{C}_e di \mathcal{C} e trovare un'isometria g che trasforma \mathcal{C} in \mathcal{C}_e .

(iii) Determinare la forma canonica proiettiva \mathcal{D}_0 di \mathcal{D} e trovare un cambiamento di coordinate proiettive che trasforma \mathcal{D} in \mathcal{D}_0 .

(iv) Detta \mathcal{C}_0 la chiusura proiettiva di \mathcal{C} (rispetto a X_0), trovare, se esiste un cambiamento di coordinate omogenee che trasforma \mathcal{C}_0 nella conica proiettiva $\mathcal{A} : 2X_1X_2 - X_0^2 = 0$.