

Esercizio 1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[-1, -3, 2a+3, 0]

Esercizio 2. Data $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta.

(i) $A + A^T$ è una matrice simmetrica. [vero]

(ii) Se A ha determinante non nullo anche $A + A^T$ ha determinante non nullo.

[Falso. Basta scegliere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

(iii) Se $\det A = 1$ allora $\det(2A) = 2$. [falso, vale 4]

(iv) Se $\det A = 1$ allora $\det(AB) = \det(B)$, per ogni $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[vero per il teorema di Binet]

Esercizio 3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

[-5, 3, 1, -10, -6, 4]

Esercizio 4. Sia k un parametro reale e siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det A$ e $\det B$ e stabilire per quali valori di k essi sono simultaneamente non nulli.

[i determinanti valgono rispettivamente $2k-3$ e $-2k(k-1)^2$; sono contemporaneamente non nulli per $k \neq 0, 1, 3/2$]

Esercizio 5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

[-abc, abc, (ad-bc)²]

Esercizio 6. Calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 & 1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & -h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Per quali valori di k le seguenti matrici hanno determinante nullo?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ k & k & k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -k \\ k & 0 & -k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

[per ogni valore di k ; $k = 0, \pm 2$; $k = 0, 1$; $k = 1, -2$]

Esercizio 8. Calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 2 contenuti nelle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 100 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 10 & -1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

[8, -4, 22, -3, 0, $(a-1)(b-1)(b-a)$, $\sin \alpha + \cos \alpha$]

Esercizio 10. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'indeterminata x :

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{pmatrix} \geq 0 \quad \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} < 0.$$

[$x = -1$; $x = 0, 1$; $x \geq -1/2$; $x < 1 \vee x > 2$]

Esercizio 11. Dimostrare che valgono le seguenti eguaglianze:

$$(i) \det \begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 1 \\ 1+x_1 & 1+y_1 & 1 \\ 1+x_2 & 1+y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \det \begin{pmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & ac & bc \\ 1 & ab & ac \\ 1 & bc & ab \end{pmatrix}$$

$$(iv) \det \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ x_1+z_1 & x_2+z_2 & x_3+z_3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$