Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.3 – Determinanti

Esercizio 1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[-1, -3, $2a+3$, 0]

Esercizio 2. Data $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta.

(i) $A + A^T$ è una matrice simmetrica. [vero]

(ii) Se A ha determinante non nullo anche $A + A^T$ ha determinante non nullo.

[Falso. Basta scegliere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

(iii) Se $\det A = 1$ allora $\det(2A) = 2$. [falso, vale 4]

(iv) Se $\det A = 1$ allora $\det(AB) = \det(B)$, per ogni $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[vero per il teorema di Binet]

Esercizio 3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

[-5, 3, 1, -10, -6, 4]

Esercizio 4. Sia k un parametro reale e siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det A$ e $\det B$ e stabilire per quali valori di k essi sono simultaneamente non nulli.

[i determinanti valgono rispettivamente $2k-3$ e $-2k(k-1)^2$; sono contemporaneamente non nulli per $k \neq 0, 1, 3/2$]

Esercizio 5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

[$-abc$, abc, $(ad-bc)^2$]

Esercizio 6. Calcolare il determinante della matrice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 & 1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & -h & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$[(h+1)(h+3)^2]$

Esercizio 7. Per quali valori di k le seguenti matrici hanno determinante nullo?

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ k & k & k\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & k & 0\\ k & 2 & 0\\ 1 & 0 & k\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & -k & 0\\ 1 & 0 & -k\\ k & 0 & -k\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$$

[per ogni valore di k; $\quad k = 0, \pm 2$; $\quad k = 0, 1$; $\quad k = 1, -2$]

Esercizio 8. Calcolare tutti i determinanti delle sottomatrici di ordine 2 contenuti nelle matrici $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 100\\ 3 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Esercizio 9. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\det\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -5\\ 2 & 2 & 5 & -2\\ 4 & 4 & 6 & 3\\ 8 & 8 & 10 & -1\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}.$$

$[8,\ -4,\ 22,\ -3,\ 0,\ (a-1)(b-1)(b-a),\ \sin\alpha+\cos\alpha]$

Esercizio 10. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'indeterminata x:

$$\det\begin{pmatrix}x & 1 & 0\\ 0 & x & 1\\ 1 & 0 & x\end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ x & x & 1\\ x & x & x\end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix}x & x & 1\\ 1 & x & x\\ x & 1 & x\end{pmatrix} \geqslant 0 \qquad \det\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ x & x & 1\\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix} < 0.$$

$[x=-1; \quad x = 0, 1; \quad x \geqslant -1/2; \quad x < 1 \vee x > 2]$

Esercizio 11. Dimostrare che valgono le seguenti eguaglianze:

(i) $\det\begin{pmatrix}1+x & 1+y & 1\\ 1+x_1 & 1+y_1 & 1\\ 1+x_2 & 1+y_2 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{pmatrix}$

(ii) $\det\begin{pmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ac\\ 1 & c & ab\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$

(iii) $\det\begin{pmatrix}a & b & ab\\ b & c & bc\\ c & a & ac\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & ac & bc\\ 1 & ab & ac\\ 1 & bc & ab\end{pmatrix}$

(iv) $\det\begin{pmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3\\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3\\ x_1+z_1 & x_2+z_2 & x_3+z_3\end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}.$