Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.3 – Serie di potenze

Esercizio 1. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$ $\quad [\, I = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,]$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^n(n+1)}$ $\quad [\, I = [-2, 2)\,]$

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\log n}{n\ 2^n} x^n$ $\quad [\, I = [-2, 2)\,]$

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n\ (x+3)^n}{2^n}$ $\quad [\, I = (-5, -1)\,]$

(v) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x+4)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ $\quad [\, I = [-6, -2)\,]$

(vi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^n\,(x+7)^n$ $\quad [\, I = \{-7\}\,]$

(vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x+\sqrt{2})^n}{n!}$ $\quad [\, I = \mathbb{R}\,]$

(viii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x+3)^n}{2^n\ n^3}$ $\quad [\, I = [-5, -1]\,]$

(ix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x+9)^{n-1}}{(n-1)^2}$ $\quad [\, I = [-10, -8]\,]$

Esercizio 2. Sia f una funzione indefinitamente derivabile su $\mathbb{R}$ tale che le sue derivate verificano le seguenti condizioni per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 17 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dimostrare che f è somma della sua serie di Taylor di centro $x_0 = -\frac{3}{4}$.

Esercizio 3. Si definiscono su $\mathbb{R}$ le funzioni *seno iperbolico* (sinh) e *coseno iperbolico* (cosh) come segue:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Calcolare i loro sviluppi in serie di Mac Laurin.

[Sommando termine a termine gli sviluppi di e^x e di e^{-x}, si trova $\cosh x = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
Similmente per l'altra: $\sinh x = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$]

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Mac Laurin le seguenti funzioni (specificando un intervallo in cui sono valide):

(i) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad\left[\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right]$

(ii) $f(x) = e^{-x^2}$ $\quad\left[\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\right]$

(iii) $f(x) = \dfrac{\log(1+x^3)}{x}$ $\quad\left[\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{3n+2}\right]$

(iv) $\cos \dfrac{x}{2}$ $\quad\left[\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!} x^{2n}\right]$

(v) $f(x) = \frac{3}{(1+x)(2+3x)}$

[Si trova che $f(x) = \frac{9}{3x+2} - \frac{3}{x+1}$. Si sfruttino allora gli sviluppi in serie della serie geometrica. Per $\frac{1}{3x+2}$, si proceda come segue: $\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{1-(-\frac{3x}{2})} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-3x}{2}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n 3^n}{2^n}x^n$. Infine, $f(x) = 9\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n 3^n}{2^n}x^n - 3\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\left[\frac{3^{n+2}}{2^n} - 3\right]x^n$.]

Esercizio 5. Calcolare fino alla seconda cifra decimale i seguenti numeri reali:

(i) π

[Usando lo sviluppo in serie dell'arcotangente si trova che $\pi = 4\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Poiché la serie è a segno alterno, dal teorema di Leibniz sappiamo che l'errore che si commette arrestando la somma al termine n-simo è $|E(n)| < \frac{1}{2n+1}$. Per avere una precisione del centesimo, ci serve l'intero n più piccolo tale che $0,001 < \frac{1}{2n+1}$, ovvero l'intero più grande $n < \frac{999}{2} = 499,5$. È sufficiente quindi arrestare la somma ad $n = 500$. Si trova $\pi \simeq 3,14$.]

(ii) e

[Lo sviluppo in serie esponenziale non è a segno alterno, non abbiamo quindi un stima a priori dell'errore. Siccome la serie ha però andamento crescente, basta fermarsi dopo alcuni tentativi quando si osserva che le prime due cifre dopo la virgola si stabilizzano. Ci si può già fermare ad $n = 6$ per trovare $e \simeq 2,71$.]

(iii) $\log 2$

(iv) $\log 3$

[Si ricordi ce lo sviluppo in serie del logaritmo ha validità in $(-1,1]$. Si sfrutti allora il fatto che $\log 3 = -\log\frac{1}{3}$. Usando lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$, con $x = -\frac{2}{3}$, si ottiene il valore cercato.]

(v) $\sin 1$

(vi) $\frac{\sin 2}{2}$

(vii) e^{-4}

Esercizio 6. Calcolare per serie i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$ $\quad\left[\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}\right]$

(ii) $\displaystyle\int_0^x \cos(t^3)dt$ $\quad\left[\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(6n+1)(2n)!}x^{6n+1}\right]$

(iii) $\displaystyle\int_0^x \frac{\log(t+1)}{t}dt$

(iv) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ $\quad\left[\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$

Esercizio 7. Calcolare fino alla terza cifra decimale gli integrali dell'esercizio precedente nell'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 8. Calcolare la somma della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

[Derivando la serie geometrica si ottiene che $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2}$. Sicché, moltiplicando tutto per x, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^n = \frac{x}{(x-1)^2}$.]

Esercizio 9. Calcolare le somme delle seguenti serie numeriche:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n 4^n}{n!}$

[Si osservi che è uno sviluppo in serie esponenziale $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n 4^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-4)^n}{n!} = e^{-4}$.]

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{3^n}$

[È uno sviluppo in serie geometrica che parte da $n=1$. Si ottiene $\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$]

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{5^n}{2n}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n 9^n}{(2n+1)!}$

[Dallo sviluppo della funzione seno abbiamo che $\displaystyle\sin x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!}$. Pertanto, $\displaystyle\frac{\sin x}{x} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!}$. Se ne deduce che lo sviluppo proposto ha per somma $\frac{\sin 3}{3}$.]

Esercizio 10. Risolvere per serie le seguenti equazioni differenziali:

(i) $y'' + y = 0$

(ii) $y' - y = 0$

(iii) $y' = x^2 y$

(iv) $y'' - xy' - y = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.