Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.4 – Serie di Fourier

Esercizio 1. Calcolare la serie di Fourier delle seguenti funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$:

(i) $f(x) = 5$

(ii) $f(x) = \sin x$

(iii) $f(x) = \cos^2 x$

(iv) $f(x) = \sin^3 x$

(v) $f(x) = 2 + 3\sin x - \frac{3}{2}\cos 2x$

(vi) $f(x) = 2\sin^2 3x \cos 5x$

Esercizio 2. Costruire una funzione regolare a tratti f definita sull'insieme $[-5, 7]$ che è

(i) continua ma non derivabile in $x_0 = -1$ e $x_1 = 3$

(ii) discontinua in $x_2 = 2$

(iii) continua e derivabile in $x_3 = 1$, per cui si abbia $f(x_3) = f'(x_3) = 2$.

Esercizio 3. Siano date le seguenti funzioni definite in $[-\pi, \pi]$ e prolungate per periodicità su tutto l'asse reale. Si calcoli la loro serie di Fourier:

(i) $f(x) = |x|$

(ii) $f(x) = x$

(iii) $f(x) = x^3$

(iv) $f(x) = x^2$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ -1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(vii) $f(x) = \begin{cases} \pi^2 & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$

Esercizio 4. Detta $S_f(x)$ la somma della serie di Fourier delle funzioni dell'esercizio precedente, calcolare per ciascuna di esse $S_f(0)$, $S_f(\frac{\pi}{2})$, $S_f(\pi)$, $S_f(\frac{18}{4}\pi)$ e $S_f(5\pi)$.

Esercizio 5. A partire dallo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, definita in $[-\pi, \pi]$ e poi prolungata per periodicità su tutto l'asse reale, provare che vale l'identità

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 6. A partire dallo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^4$, definita in $[-\pi, \pi]$ e poi prolungata per periodicità su tutto l'asse reale, provare che vale l'identità

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Esercizio 7. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{14\sin^4(\pi - x^2) + 5}{\sin^2(x) + 8}$$

definita in $[0, 2\pi]$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Calcolare i coefficienti b_7 e b_{15} del suo sviluppo in serie di Fourier. Detta inoltre $S(x)$ la somma della sua serie di Fourier, calcolare $S(0)$.