Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.5 – Topologia in $\mathbb{R}^2$

Esercizio 1. Dopo aver disegnato i seguenti sottoinsiemi del piano euclideo, si determini per ciascuno di essi la parte interna, la parte esterna, la frontiera, la chiusura, il derivato (l'insieme dei punti di accumulazione) e i loro punti isolati. Si dica inoltre se tali insiemi sono limitati, connessi, aperti, chiusi.

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$

(iii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

(iv) $A = (\mathbb{R}^2 \setminus I_1(O)) \cup \{O\}$, dove O è il punto origine $O(0,0)$

(v) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

(vi) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0\}$

(vii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 3 \leqslant 0\}$

(viii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0\}$

(ix) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y - 3 \geqslant 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$

(x) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1 < y < 2 - x^2\}$

(xi) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 2y| \leqslant 1\}$

(xii) $A = [1,3] \times \{1\}$

(xiii) $A = \mathbb{N} \times \{0\}$

(xiv) $A = \{2\} \times (-\infty, 3)$

(xv) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < 0\} \cap I_1(O)$

(xvi) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \max\{x,\ y + 2\} \leqslant 1\}$

(xvii) $A = I_1(O) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$

Esercizio 2. Siano dati nel piano un punto P ed un insieme E. Si definisce distanza di P da E, il seguente numero

$$d(P,E) = \inf_{Q \in E}\{d(P,Q)\},$$

ovvero come l'estremo inferiore dell'insieme delle distanze di P dai punti dell'insieme E.

(i) Preso $P(1,-2)$ ed $E = \{Q(-1,-1)\}$, calcolare $d(P,E)$.

(ii) Calcolare la distanza del punto $P(2,1)$ dall'insieme $E = \{A(-1,2),\ B(2,2),\ C(2,0)\}$.

(iii) Calcolare la distanza dell'origine dalla semiretta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y + 1 = 1,\ y > 0\}$.

(iv) Calcola la distanza di $P(1/2,1)$ dal triangolo (compreso il bordo) i cui lati si trovano sulle rette $x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ e $x = 1$.

(v) Perché è sempre possibile calcolare la distanza di un punto da un insieme?