**Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S**
**Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni**
**Corso di Laurea in Statistica Economia e Società**
**Corso di Laurea in Statistica gestionale**
**Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola**
**Foglio n.6 – Limiti di funzioni**

**Esercizio 1.** Verificare i seguenti limiti:

(i) $\lim_{x\to -2}(2x+1) = -3$

[Sia $e > 0$. Partendo dalla condizione $|(2x+1)-(-3)| < \varepsilon$, ovvero $|2x+4| < \varepsilon$, si trova che $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Quindi, risolvendo rispetto ad $x$, è vero che $-2-\frac{\varepsilon}{2} < x < -2+\frac{\varepsilon}{2}$. Posto $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, l'ultima diseguaglianza diventa $-2-\delta < x < -2+\delta$, che realizza un intorno del punto $-2$. Ciò significa che fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, prendendo $-2-\delta < x < -2+\delta$, con $x \neq -2$, si ha che $|(2x+1)-(-3)| < \varepsilon$. Il limite è pertanto verificato.]

(ii) $\lim_{x\to 9}\frac{x-6}{3} = 1$

[Partendo da $|\frac{x-6}{3}-1| < \varepsilon$ si trova che $9-3\varepsilon < x < 9+3\varepsilon$, che preso $x \neq 9$, realizza un intorno del punto $x_0 = 9$. Il limite è pertanto verificato.]

(iii) $\lim_{x\to 2}2^x = 4$

[Procedendo come sopra si trova un intorno del tipo $(\log_2(4-\varepsilon);\ \log_2(4+\varepsilon))$ del punto $x_0 = 2$.]

(iv) $\lim_{x\to -1}3^x = \frac{1}{3}$ [$(\log_3(\frac{1}{3}-\varepsilon);\ \log_3(\frac{1}{3}+\varepsilon))$]

(v) $\lim_{x\to -1}e^{x+1} = 1$ [$(\log(1-\varepsilon)-1;\ \log(1+\varepsilon)-1)$]

(vi) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4} = 2$

[Si prenda per comodità $0 < \varepsilon < 2$. Si trova l'intorno $(\varepsilon^2-4\varepsilon;\ \varepsilon^2+4\varepsilon)$ del punto $x_0 = 0$.]

(vii) $\lim_{x\to 3}\log_2(x^2-5) = 2$ [$(\sqrt{2^{2-\varepsilon}+5};\ \sqrt{2^{\varepsilon+2}+5})$]

(viii) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

[Preso $M > 0$, si parta da $\frac{1}{(x-1)^2} > M$. Si ottiene $1-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1+\frac{1}{\sqrt{M}}$, che realizza un intorno di $x_0 = 1$.]

(ix) $\lim_{x\to 3}\frac{1+x^2}{(3-x)^2} = +\infty$

[Si prenda $M > 1$. Allora si trova $\frac{M}{M-1}-\sqrt{\frac{10M-1}{(M-1)^2}} < x < \frac{M}{M-1}+\sqrt{\frac{10M-1}{(M-1)^2}}$]

(x) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x} = +\infty$ [$(\frac{1}{\sqrt{M}};\ +\infty)$]

(xi) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1+x^2}{x} = -\infty$ [$(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{M}})$]

(xii) $\lim_{x\to +\infty}\frac{9x-3}{3x} = 3$ [$(\frac{1}{\varepsilon};\ +\infty)$]

(xiii) $\lim_{x\to -\infty}\frac{9x-3}{3x} = 3$ [$(-\infty;\ -\frac{1}{\varepsilon})$]

(xiv) $\lim_{x\to+\infty} \log \frac{x+1}{x} = 0$ $\quad [\,(\frac{1}{e^{\varepsilon}-1};\ +\infty)\,]$

(xv) $\lim_{x\to-\infty} \log \frac{x+1}{x} = 0$ $\quad [\,(-\infty;\ \frac{1}{e^{-\varepsilon}-1})\,]$

(xvi) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + 1}{\log x} = 1$ $\quad [\,(e^{\frac{1}{\varepsilon}};\ +\infty)\,]$

(xvii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad [\,(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}};\ +\infty)\,]$

(xviii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad [\,(-\infty;\ -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}})\,]$

(xix) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$ $\quad [\,(-\infty;\ -\frac{5}{\varepsilon}+3)\,]$

(xx) $\lim_{x\to-1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$

(xxi) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ $\quad [\,(-\infty;\ -\sqrt{M^2-1})\,]$

(xxii) $\lim_{x\to+\infty} (1+e^{2x}) = +\infty$ $\quad [\,(\frac{1}{2}\log(M-1);\ +\infty)\,]$

(xxiii) $\lim_{x\to-\infty} (2+\sqrt{3-2x}) = +\infty$

(xxiv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+3} = +\infty$

(xxv) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+3} = -\infty$

(xxvi) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x-2}-x) = -\infty$

**Esercizio 2.** Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$ Provare che $f$ non ammette limite per $x \to 0$.

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 1 & \text{se } x < -1. \end{cases}$ Provare che $f$ non ammette limite per $x \to 1$.