Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.6 – Sistemi lineari
prof. Cigliola

Esercizio 1. Utilizzando il metodo dato nella dimostrazione del teorema di Cramer, si calcoli la matrice inversa delle seguenti matrici:

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -13 & -5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi a coefficienti reali col metodo della matrice inversa:

(i) $\begin{cases} 6x_1 - 17x_2 = -22 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ $\qquad (2, 2)$

(ii) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ $\qquad (-1, 0, 1)$

(iii) $\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases}$ $\qquad (3, 0, 1, -1)$

Esercizio 3. Si risolvano i seguenti sistemi lineari omogenei:

(i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10z = 0 \\ 5x + 9y + 13z = 0 \end{cases}$ $\qquad (x, -2x, x)$

(ii) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $(0, 0, 0)$

(iii) $\begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -4x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -10x - 6y = 0 \end{cases}$ $(3x, -5x, 2x)$

(iv) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ $(x_1,\ x_2,\ 0,\ \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2,\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_2)$

(v) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ $(2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$

(vi) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \end{cases}$ $(x_1,\ -3x_1,\ x_3,\ x_4,\ -x_1)$

(vii) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $(x_1,\ x_2,\ 3x_1 + x_2,\ 2x_1)$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari usando la regola di Cramer:

(i) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ $(-1, 1)$

(ii) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ $(-2, 2, -1)$

(iii) $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ 10x_1 - x_2 + 6x_3 = 18 \\ -10x_1 + x_2 + 6x_3 = 16 \end{cases}$ $(17/45,\ 25/9,\ 17/6)$

(iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$ $(-1, 1, 0, 1, 0)$

(v) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ $(0, 1, 0, 0)$

(vi) $\begin{cases} 3(2x+z)-1=z-2y \\ 2z-y=2(2-x+y) \\ 4x+y=3-z \end{cases}$ $(5/2,\ -13/5,\ -22/5)$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti sistemi lineari :

(i) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+y+6z=0 \end{cases}$ $(3t, 0, -t)$

(ii) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=1 \\ -x-y+z=-1 \end{cases}$ $(x,\ 3/2-x,\ 1/2)$

(iii) $\begin{cases} x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3+x_4=0 \end{cases}$ $(x_1,\ x_2,\ x_1+2x_2,\ 3x_1+7x_2)$

(iv) $\begin{cases} -y-z=3 \\ x+3y+2z=-5 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$ impossibile

(v) $\begin{cases} -x+z=-2 \\ x+z=0 \\ x+y=3 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $(1, 2, -1)$

(vi) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+z=2 \\ x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x+y=\pi \end{cases}$ impossibile

Esercizio 6. Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari parametrici:

(i) $\begin{cases} x+2y+hz-t=1 \\ (h-1)y+(1-h)t=h \\ x+3y+2z-ht=3 \end{cases}$

- per $h \neq 1, 2$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $\left(\frac{(h-1)^2t-1}{h-1},\ \frac{h+(h-1)t}{h-1},\ \frac{-ht+t-1}{h-1},\ t\right)$
- per $h = 2$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(-3-2z-t,\ 2+t,\ z,\ t)$
- per $h = 1$ impossibile

(ii) $\begin{cases} kx+y=2k-3 \\ 2x-ky=3k+4 \end{cases}$

$(2, -3)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$

(iii) $\begin{cases} ax + y = 1 - 2a \\ x + y = -2 \end{cases}$

- per $a \neq 1$ determinato con soluzione $(\frac{3-2a}{a-1}, \frac{1}{1-a})$
- per $a = 1$ impossibile

(iv) $\begin{cases} 3x - ay + 2z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

- per $a \neq 3$ indeterminato con ∞^1 soluzioni $(x, -x, -\frac{a+3}{2}x)$
- per $a = 3$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(\frac{3y-2z}{3}, y, z)$

(v) $\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = b \end{cases}$

- per $a \neq b$ determinato con soluzione $(\frac{1-b^2}{a-b}, \frac{ab-1}{a-b})$
- se $a = b \neq \pm 1$ il sistema è impossibile
- se $a = b = 1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, 1 - x)$
- se $a = b = -1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, -1 - x)$

(vi) $\begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

- per $k \neq -9$ impossibile
- per $k = -9$ determinato con soluzione $(-15/16, 1/8)$

(vii) $\begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \end{cases}$

- per $a \neq 1, 3, -4$ determinato con soluzione $(\frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4})$
- per $a = 1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, \frac{1-x}{4}, \frac{1-x}{4})$
- per $a = 3$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, x, \frac{1-4x}{3})$
- per $a = -4$ impossibile

(viii) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

- per $k \neq 1, -2$ determinato con soluzione $(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})$
- per $k = 1$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(x, y, 1 - x - y)$
- per $k = -2$ impossibile

(ix) $\begin{cases} ax_2 + 3x_3 - ax_4 = 2 \\ ax_1 + 2ax_2 - x_3 = a \\ ax_1 + ax_2 - 4x_3 + ax_4 = a - 1 \end{cases}$ impossibile per ogni valore di a

(x) $\begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$

- per $h \neq 0$ e $k \neq 1$ impossibile
- per $h = 0$ determinato con soluzione $(0, 0, 1)$
- per $k = 1$ e $h \neq 1$ determinato con soluzione $(\frac{h}{h-1}, \frac{h}{1-h}, \frac{1}{1-h})$
- per $h = 1$ impossibile