

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi a coefficienti reali col metodo della matrice inversa:

$$(i) \begin{cases} 6x_1 - 17x_2 = -22 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \quad (2, 2)$$

$$(ii) \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases} \quad (-1, 0, 1)$$

$$(iii) \begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases} \quad (3, 0, 1, -1)$$

Esercizio 2. Si risolvano i seguenti sistemi lineari omogenei:

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10z = 0 \\ 5x + 9y + 13z = 0 \end{cases} \quad (x, -2x, x)$$

$$(ii) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad (0, 0, 0)$$

$$(iii) \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -4x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -10x - 6y = 0 \end{cases} \quad (3x, -5x, 2x)$$

$$(iv) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (x_1, x_2, 0, \frac{6}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_2)$$

$$(v) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad (2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$(vi) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad (x_1, -3x_1, x_3, x_4, -x_1)$$

$$(vii) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (x_1, x_2, 3x_1 + x_2, 2x_1)$$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti sistemi lineari usando la regola di Cramer:

$$(i) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases} \quad (-1, 1)$$

$$(ii) \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad (-2, 2, -1)$$

$$(iii) \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ 10x_1 - x_2 + 6x_3 = 18 \\ -10x_1 + x_2 + 6x_3 = 16 \end{cases} \quad (17/45, 25/9, 17/6)$$

$$(iv) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad (-1, 1, 0, 1, 0)$$

$$(v) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (0, 1, 0, 0)$$

$$(vi) \begin{cases} 3(2x + z) - 1 = z - 2y \\ 2z - y = 2(2 - x + y) \\ 4x + y = 3 - z \end{cases} \quad (5/2, -13/5, -22/5)$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari :

$$(i) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases} \quad (3t, 0, -t)$$

$$(ii) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases} \quad (x, 3/2 - x, 1/2)$$

$$(iii) \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (x_1, x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1 + 7x_2)$$

$$(iv) \begin{cases} -y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = -5 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$$(v) \begin{cases} -x + z = -2 \\ x + z = 0 \\ x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad (1, 2, -1)$$

$$(vi) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = \pi \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Esercizio 5. Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari parametrici:

$$(i) \begin{cases} x + 2y + hz - t = 1 \\ (h - 1)y + (1 - h)t = h \\ x + 3y + 2z - ht = 3 \end{cases}$$

- per $h \neq 1, 2$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(\frac{(h-1)^2 t - 1}{h-1}, \frac{h+(h-1)t}{h-1}, \frac{-ht+t-1}{h-1}, t)$
- per $h = 2$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(-3 - 2z - t, 2 + t, z, t)$
- per $h = 1$ impossibile

$$(ii) \begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$$

$(2, -3)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$

$$(iii) \begin{cases} ax + y = 1 - 2a \\ x + y = -2 \end{cases}$$

- per $a \neq 1$ determinato con soluzione $(\frac{3-2a}{a-1}, \frac{1}{1-a})$
- per $a = 1$ impossibile

$$(iv) \begin{cases} 3x - ay + 2z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

- per $a \neq 3$ indeterminato con ∞^1 soluzioni $(x, -x, -\frac{a+3}{2}x)$
- per $a = 3$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(\frac{3y-2z}{3}, y, z)$

$$(v) \begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

- per $a \neq b$ determinato con soluzione $(\frac{1-b^2}{a-b}, \frac{ab-1}{a-b})$
- se $a = b \neq \pm 1$ il sistema è impossibile
- se $a = b = 1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, 1-x)$
- se $a = b = -1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, -1-x)$

$$(vi) \begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

- per $k \neq -9$ impossibile
- per $k = -9$ determinato con soluzione $(-15/16, 1/8)$

$$(vii) \begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \end{cases}$$

- per $a \neq 1, 3, -4$ determinato con soluzione $(\frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4})$
- per $a = 1$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, \frac{1-x}{4}, \frac{1-x}{4})$
- per $a = 3$ indeterminato con ∞^1 soluzioni date da $(x, x, \frac{1-4x}{3})$
- per $a = -4$ impossibile

$$(viii) \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

- per $k \neq 1, -2$ determinato con soluzione $(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})$
- per $k = 1$ indeterminato con ∞^2 soluzioni date da $(x, y, 1-x-y)$
- per $k = -2$ impossibile

$$(ix) \begin{cases} ax_2 + 3x_3 - ax_4 = 2 \\ ax_1 + 2ax_2 - x_3 = a \\ ax_1 + ax_2 - 4x_3 + ax_4 = a - 1 \end{cases}$$

impossibile per ogni valore di a

$$(x) \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$$

- per $h \neq 0$ e $k \neq 1$ impossibile
- per $h = 0$ determinato con soluzione $(0, 0, 1)$
- per $k = 1$ e $h \neq 1$ determinato con soluzione $(\frac{h}{h-1}, \frac{h}{1-h}, \frac{1}{1-h})$
- per $h = 1$ impossibile