Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.7 – Dipendenza lineare

Esercizio 1. Usando opportunamente la nozione di rango di matrice, stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti:

(i) $v_1 = (1, -1), \quad v_2 = (0, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^2$ [lin. ind.]

(ii) $v_1 = (1, -1), \quad v_2 = (-1, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^2$ [lin. dip.]

(iii) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2) \quad$ in $\mathbb{R}^3$ [lin. ind.]

(iv) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^3$ [lin. dip.]

(v) $v_1 = (-2, 2, 4), \quad v_2 = (-1, 1, 2) \quad$ in $\mathbb{R}^3$ [lin. dip.]

(vi) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0) \quad$ in $\mathbb{R}^3$ [lin. ind.]

Esercizio 2. Usando opportunamente la nozione di rango di matrice, stabilire per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-1, k, 1, k) \quad v_2 = (1, 0, 1, 0) \quad v_3 = (-1, 1, 1, k) \quad v_4 = (2, 0, k, 1)$$

[per $k \neq 1, \ 1 \pm \sqrt{3}$]

Esercizio 3. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 2, 3)$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Scrivere il vettore $(3, -1, 1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. Provare infine che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 4. Sono dati i vettori $v = (1, 1, 3, 1)$ e $w = (2, 0, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^4$. Per quali valori reali di k il vettore $(0, 2, k, 3)$ è combinazione lineare di v e w? [se e solo se $k = 6$]

Esercizio 5. Sia $E = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)) \subseteq \mathbb{Q}^4$. Per quali valori di k si ha che $(1, k, 2, -1) \in E$?

[se e solo se $k = -3$]

Esercizio 6. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti:

(i) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. [lin. dip.]

(ii) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [lin. ind.]

(iii) $v_1 = \sin 2x$, $v_2 = \cos x$, $v_3 = \sin x \cos x$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. [lin. dip.]

(iv) $v_1 = x^2 - x + 1$, $v_2 = 1 + x^2$, $v_3 = 2x^2 - 2x + 1$ in $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. [lin. ind.]

(v) $v_1 = 0$, $v_2 = x^3 - \pi x + 1000$, $v_3 = x^2 - x + 2$ in $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$. [lin. dip.]

Esercizio 7. Scrivere se possibile il vettore $v = x^2 + x - 1$ come combinazione lineare dei vettori $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x - 1$ e $p_3 = 1 + 2x^2$. [si ha $v = \frac{1}{3}p_1 + \frac{4}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3$]

Esercizio 8. Per quali valori di k il vettore $v = x^2 + kx - k$ è combinazione lineare dei vettori $p_1 = 2x^2 + 3x + 1$ e $p_2 = x^2 + x - 2$? [se e solo se $k = 7/6$]