Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.7 – Limiti e continuità

Esercizio 1. Verificare i seguenti limiti utilizzando la definizione data:

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2x^2+y^2} = +\infty$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy) = 0$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2+y^2+1) = 2$

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(x^2+y^2-2x+1) = -\infty$

Esercizio 2. Provare che

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{-2(x-2)^2}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ non esiste

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ [$+\infty$]

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2+y^2}$ [1]

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ [non esiste]

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ [0]

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$ [non esiste]

(vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [0]

(vii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{xy}\,\log(x^2+y^2)$ [0]

Esercizio 4. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ [continua]

(ii) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ [non continua]

Esercizio 5. Al variare del parametro reale α, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+1)y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}$$

[Il limite esiste per $\alpha < \frac{3}{2}$ e vale 0]

Esercizio 6. Determinare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2-1)(x+y^2-2) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2 & x^2+y^2 \geqslant 1 \\ 6x & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \log(xy) & xy > 0 \\ 0 & xy \leqslant 0 \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \log(xy) & xy > 1 \\ 0 & xy \leqslant 1 \end{cases}$

Esercizio 7. Dopo aver verificato che alle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Weierstrass, si deteminino il loro valore massimo ed il loro valore minimo, specificando almeno un punto di massimo ed un punto di minimo in cui tali valori vengono assunti:

(i) $f(x,y) = \sqrt{4-4x^2-y^2}$

(ii) $f(x,y) = 1-\sqrt{4x^2+y^2}$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 4\}$

(iii) $f(x,y) = 2+x^2+y^2$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1\}$

(iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 5\}$

(v) $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 100\}$

Esercizio 8. Si determinino gli insiemi $C_{\leqslant 2}$, $C_{\geqslant 1}$, $C_{\geqslant 0}$ e $C_{\leqslant -1}$ per le seguenti funzioni, verificando che si tratta di insiemi chiusi in ogni caso:

(i) $f(x,y) = \sqrt{4-4x^2-y^2}$

(ii) $f(x,y) = 1-\sqrt{4x^2+y^2}$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 4\}$

(iii) $f(x,y) = 2+x^2+y^2$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1\}$

(iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ definita nel dominio $\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 5\}$

Esercizio 9. Costruire una funzione non continua, definita su un insieme né chiuso né limitato che ammette un unico punto di valore massimo assoluto ed un unico punto di valore minimo assoluto. (Il teorema di Weierstrass non si inverte).