Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.8 – Derivabilità

Esercizio 1. Si studino la continuità e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2. Calcolare le derivate parziali (usando la definizione data) delle seguenti funzioni nei punti accanto indicati:

(i) $f(x,y) = e^{x+2y}$ in $P_0 = (1,-1)$

(ii) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ in $P_0(1,-2)$

Esercizio 3. Si calcolino derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y) = \log(x^2+y) + \frac{e^x y}{2}$;

$$[\,f_x = \frac{2x}{x^2+y} + \frac{e^x y}{2}, \qquad f_y = \frac{1}{x^2+y} + \frac{e^x}{2},$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2} + \frac{e^x}{2},$$
$$f_{xx} = \frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2} + \frac{e^x y}{2}, \qquad f_{yy} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}]$$

(ii) $g(x,y) = x^3y - \frac{5}{3}xy^3 + x^5e^y$;

(iii) $h(x,y) = \sqrt{3x^2 - xy^3 + 1} - \frac{2}{x} + \frac{3x}{y} - \sin xy$;

$$[\,h_x = \frac{6x-y^3}{2\sqrt{3x^2-xy^3+1}} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y} - y\cos(xy),$$
$$h_y = \frac{-3xy^2}{2\sqrt{3x^2-xy^3+1}} - \frac{3}{y^2} - x\cos(xy) \quad \ldots]$$

(iv) $f(x,y) = e^x y^2 + x^5y^7 + \log\frac{x}{y}$;

(v) $f(z,y) = \frac{y^2\sin y}{x\cos y^2} + 4y\tan x$;

(vi) $f(x,y) = x^2\tan(yx^2) + \arcsin\sqrt{x^2+y^2} + 3^{x\sin y}$.

Esercizio 4. Si calcolino le derivate parziali prime delle seguenti funzioni nei punti assegnati:

(i) $f(x,y) = \log(2+e^{xy})$ in $P(1,2)$; $\qquad [\,f_x(1,2) = \frac{2e^2}{2+e^2},\ f_y(1,2) = \frac{e^2}{2+e^2}\,]$

(ii) $g(x,y) = \cos(y\sqrt{x})$ in $P(\frac{\pi}{2},3)$.

Esercizio 5. Studiare la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(i) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1\}$, in $P_0 = (1,0)$

(ii) $f(x,y) = |\log(x^2+y^2)|$ in $P_0 = (0,-1)$

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ in $P_0(0,0)$

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ in $P_0(0,0)$

Esercizio 6. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 + 8xy^2 - y^3}{x^3 + y^3},$$

verificare che si ha

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Esercizio 7. Data la funzione

$$f(x,y) = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}},$$

verificare che si ha

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Esercizio 8. Data la funzione

$$f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2},$$

verificare che si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Esercizio 9. Enunciare e dimostrare il Teorema di Schwarz.