

**Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica**  
**Geometria - A.A. 2015-2016 – prof. Cigliola**  
**Foglio n.8 – Sottospazi vettoriali**

**Esercizio 1.** Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono sottospazi vettoriali:

- (i)  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$ ;
- (ii)  $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \}$ ;
- (iii)  $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 3 \}$ ;
- (iv)  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = x + 3y = 0 \}$ ;
- (v)  $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$ ;
- (vi)  $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \}$ ;
- (vii)  $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \}$ ;
- (viii)  $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \}$ ;
- (ix)  $I = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \log y = 0 \}$ ;
- (x)  $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0 \}$ ;
- (xi)  $N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0 \}$ .

[sono sottospazi  $A, B, D$ ]

**Esercizio 2.** Sia  $W \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'insieme delle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Provare che  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 3.** Per quali valori dei parametri  $h, k \in \mathbb{R}$  i seguenti sistemi lineari hanno per soluzioni un sottospazio vettoriale non banale di  $\mathbb{R}^n$ ?

$$(i) \begin{cases} x + y + kz = 0 \\ 2x + 3y + 4hz = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10kz = 0 \\ 5x + 9y + 13z = h \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per nessun valore]}$$

$$(ii) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = h \\ 2x + y = k \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per nessun valore]}$$

$$(iii) \begin{cases} -2hx + 3z = 0 \\ -4hx - 2y + z = 0 \\ 2hx + 2y + 2z = 0 \\ -10hx - 6y = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per } h = 0\text{]}$$

$$(iv) \begin{cases} 2kx_1 + 3x_2 + x_3 - kx_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = k \\ 8x_1 + 3kx_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad \text{[per } k = 0\text{]}$$

$$(v) \begin{cases} hx_1 - 2kx_2 + hx_3 - kx_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad \text{[per ogni valore di } h \text{ e } k\text{]}$$

$$(vi) \begin{cases} 2x_1 + hx_2 - kx_5 = 0 \\ x_1 + kx_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2kx_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad \text{[per ogni valore di } h \text{ e } k\text{]}$$

**Esercizio 4.** Sia dato

$$U = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 2, f(-2) = 0 \} \cup \{ 0 \}.$$

Verificare che  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}[x]$ . Stabilire per quali valori dei parametri  $h, k, \alpha \in \mathbb{R}$ , i seguenti polinomi sono in  $U$ :

$$f(x) = (x+2)(3x-1) + k + 1 \quad g(x) = hx^2 + x + 2 + h \quad p(x) = \alpha(x^3 + 1 - x) + 2 + x.$$

Scrivere infine la forma generale degli elementi di  $U$ .

$$[\text{per } k = -1, h = 0, \alpha = 0; f(x) = ax^2 + bx + (4a - 2b)]$$

**Esercizio 5.** Sia dato  $S$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}[x]$  definito da

$$S = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0, \deg f(x) \leq 4 \} \cup \{ 0 \}.$$

Provare che  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}[x]$ . Dire se  $f(x) = x(x^2 + 1)(x^2 - 1) \in S$ . Per quali valori dei parametri  $h, k \in \mathbb{R}$  si ha  $\mathcal{L}(hx^3 + kx + k + 1) \subseteq S$ ? Scrivere infine la forma generale degli elementi di  $S$ .

$$[f(x) \notin S; h = 1, k = 0; g(x) = (-c - e)x^4 - dx^3 + cx^2 + dx + e]$$

**Esercizio 6.** Sia  $Z$  il sottospazio di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  generato dalle matrici  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Per

quali valori di  $k$  la matrice  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  appartiene a  $\mathcal{L}(A_1, A_2)$ ? [ $k = -3$ ]

**Esercizio 7.** Sia data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Dimostrare che l'insieme

$$W = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

è sottospazio vettoriale di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Questo sottospazio è detto il *centralizzante* di  $A$  in  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 8.** Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di  $M_2(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 9.** Dimostrare che l'insieme

$$W = \{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

è sottospazio vettoriale di  $M_2(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 10.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$  costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$V = \{ a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$W = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(-1) = 2 \}.$$

(i) Si verifichi che  $U$  e  $V$  sono sottospazi di  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ .

(ii) Stabilire se anche  $W$  è sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ .

[ $W$  non è sottospazio poiché non contiene il polinomio nullo]