

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.9 – Basi e dimensione

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 2, 3)$ di \mathbb{R}^3 . Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 2. Determinare una base del sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \mathcal{L}((1, -3, -2), (0, -1, -1), (0, 2, 2), (0, 0, 0), (-1, 2, 1)).$$

[il primo e il secondo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

Esercizio 3. Sia $E = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Per quali valori di k si ha che $(1, k, 2, -1) \in E$?

[per $k = -3$]

Esercizio 4. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale costituito dalle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Trovare una base di W e completarla ad una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[un base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
per ottenere una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ basta aggiungere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]

Esercizio 5. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(i) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$

(ii) $\mathcal{L}(2, 2x+2, 1, 2x+2+2x^2) = \mathcal{L}(x-x^2, 1+x, 1+x+x^2, x^2-x+1);$

(iii) $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) = \mathcal{L}((-1, 0, -1), (1, 0, 0), (-3, 0, 0), (1, 1, -1)).$

Esercizio 6. Verificare che $\{(-1, 1), (2, 1)\}$ è una base di \mathbb{R}^2 . Scrivere i vettori $u = (2, 2)$, $v = (0, 0)$, $w = (\pi, \pi)$ e $u + w$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 7. Verificare che $\{(-1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 . Scrivere i vettori $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -3, 0)$ e $u + v$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 8. Verificare che $\{x+1, x^2-1, 2-x\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Scrivere i vettori $u = x^2 + x + 1$, $v = -x - 1$ e $u + 3v$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 9. Verificare che $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Scrivere i vettori $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $u - v + 2w$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 10. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ definito come

$$U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 2, f(-2) = 0\} \cup \{0\}.$$

[una base è $\{x^2 - 4, x + 2\}$, la dimensione è 2]

Esercizio 11. Sia dato S il sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0, \deg f(x) \leq 4\} \cup \{0\}.$$

Determinare una base di S e completarla ad una base di $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$.

[una base è $\{x^4 - x^2, x^4 - 1, x^3 - x\}$, la dimensione è 3;
per ottenere una base dello spazio ambiente si aggiungano i vettori x^4 e x]

Esercizio 12. Trovare una base del sottospazio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[una base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; la dimensione è 2]

Esercizio 13. Trovare una base di

$$W = \{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

[una base è costituita dai polinomi 1 e $x + x^2$]

Esercizio 14. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$V = \{ a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Determinare una loro base.

[un base di U è $\{ x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1 \}$; una base di V è $\{ 1 + 2X + X^3, -X - X^3 \}$]

Esercizio 15. Sia n un intero positivo. Determinare una base dei sottospazi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ e $Diag_n(\mathbb{R})$. Quanto valgono le loro dimensioni?

Esercizio 16. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino i vettori $u = (2, k, 1)$, $v = (k, 2, 0)$, $w = (0, 0, k)$ e $s = (k, k, k)$ di \mathbb{R}^3 e sia F il sottospazio da essi generato. Calcolare la dimensione di F al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[per $k \neq 0, 2$ la dimensione è 3, per $k = 0$ oppure $k = 2$ invece è 2]

Esercizio 17. Si considerino i polinomi $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -kx^2 + 1$ e $h(x) = kx^2 + k$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ e sia B il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i polinomi $f(x), g(x)$ e $h(x)$ sono una base di B ? Calcolare la dimensione di B al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k il polinomio $a(x) = 2 - kx + kx^2$ appartiene a B ?

[i tre polinomi non sono base di B per nessun valore di k poiché sono linearmente dipendenti per qualsiasi valore di k ; B ha dimensione 2 per ogni valore di k ; il polinomio $a(x)$ appartiene a B solo per $k = 0$, esso è infatti multiplo del secondo generatore $g(x)$, per gli altri valori di $k \neq 0$, i tre generatori non possono generare $a(x)$ in quanto hanno tutti e tre il coefficiente di x nullo.]

Esercizio 18. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $U = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[una base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; la dimensione è 2]

Esercizio 19. Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale

$$V = \mathcal{L}(-x + 1, 2x - 2, x^2 - 1, 6) \subseteq \mathbb{R}[x].$$

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x^2 - 1 \in V$?

[V ha dimensione 3, si scarti il primo generatore; $\lambda = 1$]

Esercizio 20. Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali:

(i) $\mathcal{L}((-1, 1), (0, 0), (1, 0), (-1, 2)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [$\{(1, -1), (1, 0)\}$]

(ii) $\mathcal{L}((\pi, \pi), (e, e)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [$\{(1, 1)\}$]

(iii) $\mathcal{L}((\pi, e), (e, -\pi)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(iv) $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 3)) \subseteq \mathbb{R}^3$; [$\{(-1, 1, 1), (1, 1, 3)\}$]

(v) $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^3$; [la base canonica di \mathbb{R}^3]

(vi) $\mathcal{L}((-1, -1, -1), (0, 0, 0), (-1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

- (vii) $\mathcal{L}(1, x^3 + x + 1, -1 - x + x^2, x^3 - x^2 + 2x + 3, 2x^2 - 2x - 2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;
- (viii) $\mathcal{L}(2, 2x + 2, 1, 2x + 2 + 2x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$; [1, x, x^2]
- (ix) $\mathcal{L}(\pi + e, x + 2, x - 2 + 2000x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;
- (x) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$; [$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]
- (xi) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$;
- (xii) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 21. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze?

- (i) $\mathcal{L}(1 + x, kx - 1) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$;
[nessun valore di k , lo spazio a sinistra ha infatti al più due generatori mentre lo spazio a sinistra ha dimensione 3]
- (ii) $\mathcal{L}((k, 1, 1), (0, 0, 0), (1, k, 1), (1, 1, k)) = \mathbb{R}^3$; [per $k \neq 1, -2$]
- (iii) $\mathcal{L}(x, kx - 1, kx^2 - 1, kx^{100} + 1) = \mathbb{R}[x]$.
[nessun valore di k poiché lo spazio a destra non è finitamente generato]

Esercizio 22. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_1 + v_4\}$ è base di V . Stabilire poi se $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_1 - v_4\}$ è base di V .

Esercizio 23. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1, v_2, v_3 + \lambda v_1 + \mu v_2\}$ è base di V , per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 24. In ciascuno dei seguenti casi, trovare una base del sottospazio e completarla ad una base dello spazio accanto indicato:

- (i) $\mathcal{L}((0, 0), (1, 0), (\pi, 0)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [(1, 0), si aggiunga (0, 1)]
- (ii) $\mathcal{L}((1, 0, 1), (-1, 0, -1), (0, 0, 0), (2, 0, 2)) \subseteq \mathbb{R}^3$;
[(1, 0, 1), si aggiungano (1, 0, 0) e (0, 1, 0)]
- (iii) $\mathcal{L}((0, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$;
- (iv) $\mathcal{L}(x + 2, -x^2 + 3, 0) \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$; [$x + 2, x^2 - 3$, si aggiungano x e x^3]
- (v) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$.

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ si aggiungano } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Esercizio 25. Siano dati i vettori $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, 2)$ e $w = (1, k, -1)$ di \mathbb{R}^3 . Per quali valori di k i tre vettori formano una base di \mathbb{R}^3 ? Determinare la dimensione di $\mathcal{L}(u, v, w)$ e di $\mathcal{L}(v, w)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[per $k \neq 6$ sono una base;
per $k \neq 6$ si ha $\dim \mathcal{L}(u, v, w) = 3$, per $k = 6$ invece la dimensione è 2;
 $\mathcal{L}(v, w) = 2$, per ogni valore di k]

Esercizio 26. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (4, -2, 2, 2)).$$

[il primo e il terzo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

Esercizio 27. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia W un sottospazio vettoriale di V . Provare che $\dim W \leq \dim V$. Dimostrare inoltre che $W = V$ se e solo se $\dim W = \dim V$.