Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.9 – Basi e dimensione

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,1,-1)$ e $v_3 = (1,2,3)$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Determinare una base del sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \mathcal{L}\big((1,-3,-2),\ (0,-1,-1),\ (0,2,2),\ (0,0,0),\ (-1,2,1)\big).$$

[il primo e il secondo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

Esercizio 3. Sia $E = \mathcal{L}((1,1,0,1),(2,0,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Per quali valori di k si ha che $(1,k,2,-1) \in E$?

[per $k = -3$]

Esercizio 4. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale costituito dalle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Trovare una base di W e completarla ad una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[un base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
per ottenere una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ basta aggiungere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]

Esercizio 5. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(i) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = M_2(\mathbb{R})$;

(ii) $\mathcal{L}(2,\ \ 2x+2,\ \ 1,\ \ 2x+2+2x^2) = \mathcal{L}(x-x^2,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ x^2-x+1)$;

(iii) $\mathcal{L}((-1,1,1),\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0)) = \mathcal{L}((-1,0,-1),(1,0,0),(-3,0,0),(1,1,-1)$.

Esercizio 6. Verificare che $\{\,(-1,1),\ (2,1)\,\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Scrivere i vettori $u = (2,2)$, $v = (0,0)$, $w = (\pi,\pi)$ e $u+w$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 7. Verificare che $\{\,(-1,1,1),\ (2,1,0),\ (0,0,1)\,\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere i vettori $u = (2,1,-1)$, $v = (1,-3,0)$ e $u+v$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 8. Verificare che $\left\{\,x+1,\ x^2-1,\ 2-x\,\right\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. Scrivere i vettori $u = x^2+x+1$, $v = -x-1$ e $u+3v$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 9. Verificare che $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Scrivere i vettori $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $u - v + 2w$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 10. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ definito come

$$U = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leqslant 2,\ f(-2) = 0 \,\} \cup \{\, 0 \,\}.$$

[una base è $\left\{\,x^2-4,\ x+2\,\right\}$, la dimensione è 2]

Esercizio 11. Sia dato S il sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \,\} \cup \{\, 0 \,\}.$$

Determinare una base di S e completarla ad una base di $\mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$.

[una base è $\left\{\,x^4-x^2,\ x^4-1,\ x^3-x\,\right\}$, la dimensione è 3;
per ottenere una base dello spazio ambiente si aggiungano i vettori x^4 e x]

Esercizio 12. Trovare una base del sottospazio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[una base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; la dimensione è 2]

Esercizio 13. Trovare una base di
$$W = \left\{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

[una base è costituita dai polinomi 1 e $x + x^2$]

Esercizio 14. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$ si considerino i seguenti sottospazi:
$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$
$$V = \left\{ a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
Determinare una loro base.

[un base di U è $\left\{ x^3 - 1,\ x^2 - 1,\ x - 1 \right\}$; una base di V è $\left\{ 1 + 2X + X^3,\ -X - X^3 \right\}$]

Esercizio 15. Sia n un intero positivo. Determinare una base dei sottospazi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ e $Diag_n(\mathbb{R})$. Quanto valgono le loro dimensioni?

Esercizio 16. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino i vettori $u = (2, k, 1)$, $v = (k, 2, 0)$, $w = (0, 0, k)$ e $s = (k, k, k)$ di $\mathbb{R}^3$ e sia F il sottospazio da essi generato. Calcolare la dimensione di F al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[per $k \neq 0, 2$ la dimensione è 3, per $k = 0$ oppure $k = 2$ invece è 2]

Esercizio 17. Si considerino i polinomi $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -kx^2 + 1$ e $h(x) = kx^2 + k$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ e sia B il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i polinomi $f(x), g(x)$ e $h(x)$ sono una base di B? Calcolare la dimensione di B al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k il polinomio $a(x) = 2 - kx + kx^2$ appartiene a B?

[i tre polinomi non sono base di B per nessun valore di k poiché sono linearmente dipendenti per qualsiasi valore di k; B ha dimensione 2 per ogni valore di k; il polinomio $a(x)$ appartiene a B solo per $k = 0$, esso è infatti multiplo del secondo generatore $g(x)$, per gli altri valori di $k \neq 0$, i tre generatori non posso no generare $a(x)$ in quanto hanno tutti e tre il coefficiente di x nullo.]

Esercizio 18. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $U = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[una base è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; la dimensione è 2]

Esercizio 19. Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale
$$V = \mathcal{L}(-x + 1,\ 2x - 2,\ x^2 - 1,\ 6) \subseteq \mathbb{R}[x].$$
Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x^2 - 1 \in V$?

[V ha dimensione 3, si scarti il primo generatore; $\lambda = 1$]

Esercizio 20. Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali:

(i) $\mathcal{L}((-1, 1),\ (0, 0),\ (1, 0),\ (-1, 2)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [$\{ (1, -1),\ (1, 0) \}$]

(ii) $\mathcal{L}((\pi, \pi),\ (e, e)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [$\{ (1, 1) \}$]

(iii) $\mathcal{L}((\pi, e),\ (e, -\pi)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(iv) $\mathcal{L}((-1, 1, 1),\ (0, 0, 0),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 3)) \subseteq \mathbb{R}^3$; [$\{ (-1, 1, 1),\ (1, 1, 3) \}$]

(v) $\mathcal{L}((-1, 1, 1),\ (0, 0, 0),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^3$; [la base canonica di $\mathbb{R}^3$]

(vi) $\mathcal{L}((-1, -1, -1),\ (0, 0, 0),\ (-1, -1, 1),\ (-1, 1, 1),\ (1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(vii) $\mathcal{L}(1,\ \ x^3+x+1,\ \ -1-x+x^2,\ \ x^3-x^2+2x+3,\ \ 2x^2-2x-2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;

(viii) $\mathcal{L}(2,\ \ 2x+2,\ \ 1,\ \ 2x+2+2x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$; [$1,\ x,\ x^2$]

(ix) $\mathcal{L}(\pi+e,\ \ x+2,\ \ x-2+2000x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;

(x) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & e\\ 0 & e\end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$; [$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$]

(xi) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$;

(xii) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 21. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze?

(i) $\mathcal{L}(1+x,\ \ kx-1) = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$;

[nessun valore di k, lo spazio a sinistra ha infatti al più due generatori mentre lo spazio a sinistra ha dimensione 3]

(ii) $\mathcal{L}((k,1,1),\ (0,0,0),\ (1,k,1),\ (1,1,k)) = \mathbb{R}^3$; [per $k \neq 1, -2$]

(iii) $\mathcal{L}(x,\ \ kx-1,\ \ kx^2-1,\ \ kx^{100}+1) = \mathbb{R}[x]$.

[nessun valore di k poiché lo spazio a destra non è finitamente generato]

Esercizio 22. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ v_3-v_4,\ v_1+v_4\}$ è base di V. Stabilire poi se $\{\ v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ v_3-v_4,\ v_1-v_4\ \}$ è base di V.

Esercizio 23. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1,\ v_2,\ v_3+\lambda v_1+\mu v_2\}$ è base di V, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 24. In ciascuno dei seguenti casi, trovare una base del sottospazio e completarla ad una base dello spazio accanto indicato:

(i) $\mathcal{L}((0,0),\ (1,0),\ (\pi,0)) \subseteq \mathbb{R}^2$; [$(1,0)$, si aggiunga $(0,1)$]

(ii) $\mathcal{L}((1,0,1),\ (-1,0,-1),\ (0,0,0),\ (2,0,2)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

[$(1,0,1)$, si aggiungano $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$]

(iii) $\mathcal{L}((0,1,1,1),\ (1,0,-1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$;

(iv) $\mathcal{L}(x+2,\ -x^2+3,\ 0) \subseteq \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$; [$x+2,\ x^2-3$, si aggiungano x e x^3]

(v) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$.

[$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; si aggiungano $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$]

Esercizio 25. Siano dati i vettori $u = (1,2,1)$, $v = (1,0,2)$ e $w = (1,k,-1)$ di $\mathbb{R}^3$. Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$? Determinare la dimensione di $\mathcal{L}(u,v,w)$ e di $\mathcal{L}(v,w)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[per $k \neq 6$ sono una base;
per $k \neq 6$ si ha $\dim \mathcal{L}(u,v,w) = 3$, per $k = 6$ invece la dimensione è 2;
$\mathcal{L}(v,w) = 2$, per ogni valore di k]

Esercizio 26. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \mathcal{L}\big((2,-1,1,1),\ (0,0,0,0),\ (1,-1,1,1),\ (1,0,0,0),\ (4,-2,2,2)\big).$$

[il primo e il terzo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

Esercizio 27. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia W un sottospazio vettoriale di V. Provare che $\dim W \leqslant \dim V$. Dimostrare inoltre che $W = V$ se e solo se $\dim W = \dim V$.