Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.9 – Differenziabilità

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = |xy|.$$

(i) Provare che f è differenziabile nell'origine.

(ii) Provare che f non è differenziabile nel punto $P(1,0)$.

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

(i) Provare che f è continua nell'origine.

(ii) Provare che f non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 3. Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

[continua, derivabile e differenziabile]

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos xy}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

[non continua né differenziabile nell'origine, derivabile in tutto il suo dominio]

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

[continua, derivabile e differenziabile]

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\sin xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

[non continua né differenziabile nell'origine, derivabile in tutto il suo dominio]

Esercizio 4. Calcolare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto accanto indicato:

(i) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 + y^3$ in $P = (0,1)$ $\quad [z = 5x + 3y - 2]$

(ii) $f(x,y) = \arctan(x+2y)$ in $P = (1,0)$ $\quad [z = \frac{x}{2} + y + \frac{\pi}{4} - 1]$

(iii) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ in $P = (1,1)$ $\quad [z = \frac{5}{4} - \frac{x+y}{2}]$

Esercizio 5. Determinare il piano tangente al grafico della funzione f nel generico punto (x_0, y_0):

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad [z = 2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2]$

(ii) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad [\,z=\frac{x_0x+y_0y}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\,]$

Esercizio 6. Determinare la derivata prima rispetto alla variabile t delle funzioni composte indicate:

(i) $f(x,y)=x^2+y^2$ con $\gamma:\begin{cases}x(t)=1+t\\ t(t)=1-t\end{cases}$

$[\,F'(t)=4t]$

(ii) $f(x,y)=x^2+y^2$ con $\gamma:\begin{cases}x(t)=\cos t\\ t(t)=\sin t.\end{cases}$ Si interpreti il risultato ottenuto.

$[\,F'(t)=0$. Poiché la derivata è identicamente, se ne deduce che la funzione composta è costante. Ciò non ci sorprende poiché la curva γ è una circonferenza che individua sul grafico di f una curva di livello.$]$

(iii) $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ con $\gamma:\begin{cases}x(t)=t\\ t(t)=t\end{cases}$, per $t\neq 0$.

$[\,F'(t)=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}]$

(iv) $f(x,y)=\log(x^2-y^2)$ con $\gamma:\begin{cases}x(t)=\sqrt{1+t^2}\\ t(t)=t\end{cases}$

$[\,F'(t)=0]$

(v) $f(x,y)=x^2+y^3+2xy$ con $\gamma:\begin{cases}x(t)=\sin t\cos t\\ t(t)=e^t\end{cases}$

Esercizio 7. Calcolare il differenziale totale delle seguenti funzioni differenziabili:

(i) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}+\cos y$

(ii) $f(x,y)=\arcsin(xy)$

(iii) $f(x,y)=\log(\sqrt{x}+y^2)+\tan x$

(iv) $f(x,y)=y^2e^x-x^2e^y$