Antonio Cigliola

Note di

LOGICA e INSIEMISTICA

Capitolo 1

Logica, insiemi, numeri

1.1 Logica elementare

In questa prima parte introduttiva ci occuperemo di illustrare gli strumenti che servono in Matematica per formulare correttamente ed in maniera universalmente condivisa i risultati. Stabiliremo qui le *regole del gioco* per enunciare coerentemente definizioni e teoremi, capiremo come dimostrare correttamente la validità di una proprietà e, cosa molto importante, impareremo a verificare in maniera giusta e convincente che alcune asserzioni sono false.

Grammatica e Matematica

Come ogni disciplina scientifica, anche la Matematica ha bisogno di un *linguaggio* ed ha pertanto bisogno di una grammatica che ne regoli la corretta costruzione di parole e frasi. Presentiamone brevemente i suoi elementi ed il suo funzionamento. Ogni linguaggio ha bisogno di un *alfabeto* specifico fatto dei simboli usati per costruire parole e frasi e di una *sintassi* che studia le relazioni tra i vari periodi dal punto di vista formale. Poiché il linguaggio comune è spesso involuto ed ambiguo per le nostre necessità, nelle scienze viene usato un linguaggio univoco ed universalmente accettato: il *linguaggio formale*. L'alfabeto matematico è l'insieme di tutti i simboli matematici, alcuni dei quali sono ben noti, ad esempio: '1', '+', 'log', '(', '∞', ed altri che impareremo ad utilizzare in seguito come '$\exists$', '$\vee$', '$\cap$', '$\varnothing$'. La Logica, infine, rappresenta la sintassi della Matematica. Essa stabilisce se una proposizione è sintatticamente *ben formata* e se può quindi far parte del discorso matematico. Possiamo quindi dare la seguente:

Definizione 1.1. Una *proposizione* in Matematica è una affermazione di cui si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa.

Ad esempio sono proposizioni: '2 è un numero primo', 'Non esistono malfattori sulla Terra', 'Se piove mi bagno'. Non sono invece proposizioni matematiche frasi del tipo: 'Quali sono le province del Lazio?', o 'Che bella la luna stasera!' oppure ancora 'Il Monte Bianco è molto alto'.

Concetti primitivi ed Assiomi

Ma cos'è il vero? Cosa il falso? In breve: non ci preoccuperemo di dare una risposta a questa domanda, lasciamo che se ne occupino i filosofi. Si darà infatti per buono il concetto della verità, diremo che esso è un *concetto primitivo.* Ogni discorso scientifico necessita di un punto iniziale a partire dal quale costruire tutto il resto. Servono quindi dei minimi termini intuitivi, facilmente comprensibili da chiunque e che non necessitano di ulteriori esemplificazioni. Ne sono esempio il vero, l'insieme vuoto, il numero zero, i punti e le rette del piano e dello spazio.

Questi oggetti indefinibili, ma facilmente comprensibili, godono di proprietà elementari, gli *assiomi* o *postulati*, che non possono essere provate e vengono date per buone. Si pensi ad esempio ai celebri postulati di Euclide necessari per fondare la Geometria piana o agli assiomi di Peano che presenteremo in chiusura del capitolo per costruire l'insieme dei numeri naturali.

Calcolo proposizionale

Come si fa nella grammatica dei linguaggi comuni, ci proponiamo di imparare a costruire grazie alla Logica delle frasi più complesse a partire da altre proposizioni. Procederemo come in Aritmetica, quando si sommano o si moltiplicano due numeri per ottenerne un terzo. D'ora in poi useremo, come di consueto, **V** per distinguere le proposizioni vere da quelle false, indicate con **F**. Useremo infine le lettere p, q, r, $\ldots$, I, T per le proposizioni. Servendosi delle congiunzioni e delle preposizioni di uso comune è possibile costruire tipi diversi di periodi complessi che non utilizzeremo in Matematica. I soli *connettivi logici* che considereremo sono la negazione, la congiunzione, la disgiunzione ed il periodo ipotetico. Vediamo come funzionano.

Definizione 1.2. Siano p e q proposizioni. Allora

(i) $\overline{p}$, la negazione di p, è falsa se p è vera mentre è vera quando p è falsa.

(ii) $p \wedge q$, la congiunzione di p e q, produce una proposizione che è vera se e solo se sia p che q sono vere.

(iii) $p \vee q$, la disgiunzione di p e q, produce una proposizione che è falsa se e solo se sia p che q sono false.

(iv) $p \Rightarrow q$, se p allora q, produce una proposizione che è falsa se e solo se p è vera mentre q è falsa.

(v) $p \Leftrightarrow q$, p equivale a q, si ha quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Esempio 1.3. La frase '3 *non* è un numero dispari' è falsa; 'Tutti i rettangoli sono quadrati *o* $\pi < 3$' è anch'essa falsa; '*Se* $2 < 5$ *allora* il Sole è una stella' è invece vera; infine 'I quadrati sono rombi *e* Colombo scoprì l'America nel 1492' è anch'essa vera.

Esempi di equivalenze sono ‘Gauss era un matematico *se e solo se* i pentagoni hanno 5 lati’ ed ‘Un numero intero è pari *se e solo se* il suo successivo è dispari’.

Quando si ha una implicazione

$$p \Rightarrow q$$

si è soliti dire che

$$p \quad \text{è } \textit{condizione sufficiente} \text{ per} \quad q$$

e che

$$q \quad \text{è } \textit{condizione necessaria} \text{ per} \quad p.$$

Quando si ha l’equivalenza

$$p \Leftrightarrow q$$

si è soliti dire che

$$q \quad \text{è condizione necessaria e sufficiente per} \quad p.$$

Facciamo qualche esempio. Vale l’enunciato ‘Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un rombo è che sia un quadrato’. Ciò è vero perché tutti i quadrati sono dei rombi. Osserviamo che se una condizione è necessaria, non è affatto detto che sia anche sufficiente. Ad esempio, non tutti i rombi sono dei quadrati. Nelle prossime pagine impareremo a trattare con cautela le implicazioni tra proposizioni. Una celebre condizione che è sia necessaria che sufficiente è stabilita dal Teorema di Pitagora: ‘Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia rettangolo è che il quadrato costruito sull’ipotenusa sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti’.

È bene sottolineare che quando si formula una frase del discorso matematico usando il linguaggio comune, bisogna fare attenzione a tradurlo utilizzando solo i connettivi logici che abbiamo presentato. Ad esempio ‘Il triangolo ABC è isoscele *poiché* è equilatero’ andrebbe riscritta come ‘Se il triangolo ABC è equilatero, allora è isoscele’ e la frase ‘Il numero 10 è multiplo di 5 *ma* non di 3’ diventa ‘Il numero 10 è multiplo di 5 e non di 3’.

Tabelle di verità

Per capire meglio il funzionamento dei connettivi logici, si utilizzano le *tabelle di verità.* Esse servono a calcolare in maniera più immediata il valore di verità di una proposizione composta in base a quello delle componenti. La seguente tabella riassume il comportamento dei connettivi introdotti nella Definizione 1.2.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Le tabelle di verità sono particolarmente utili quando vogliamo stabilire che due espressioni sono logicamente equivalenti. Questo accade se esse assumono gli stessi valori di verità indipendentemente da quello delle componenti. Facciamo qui due importantissimi esempi, le leggi di De Morgan.

Teorema 1.4. Siano p e q proposizioni. Allora

(i) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (prima legge di De Morgan);

(ii) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (seconda legge di De Morgan).

Dimostrazione. Basta usare le tavole di verità:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Dall'uguaglianza delle colonne corrispondenti segue la tesi. **QED**

Applichiamo a degli esempi queste leggi. Dire ad esempio 'Non è vero che il Sole brilla e che Parigi non è in Italia' equivale a dire che 'O il Sole non brilla oppure Parigi è in Italia'. Inoltre 'Non si dà il caso che 5 è minore o uguale a 4' è lo stesso che dire '5 non è minore di 4 e non è nemmeno uguale a 4'.

Diremo che una proposizione è una *tautologia* se essa è sempre vera indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti. Una *contraddizione* invece è una proposizione sempre falsa. Nel successivo Teorema 1.5 vedremo due classici esempi di tautologie e contraddizioni: il principio di non contraddizione e del terzo escluso.

Seguendo l'idea della dimostrazione contenuta nella Proposizione 1.4 è possibile provare la seguente

Proposizione 1.5. *Siano p, q ed r proposizioni. Allora:*

(i) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(la doppia negazione afferma);*

(ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ *e* $p \vee p \Leftrightarrow p$ *(leggi di idempotenza);*

(iii) $p \vee \overline{p}$ *è una tautologia (principio del terzo escluso);*

(iv) $p \wedge \overline{p}$ *è una contraddizione (principio di non contraddizione);*

(v) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *e* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(proprietà commutativa);*

(vi) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ *(prima legge delle inverse);*

(vii) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *è una tautologia (proprietà transitiva).*

Esercizio 1.1. Dimostrare il Teorema 1.5 utilizzando le tabelle di verità.

Più che svolgere l'esercizio precedente, il che si fa in maniera meccanica, ci sembra utile dare alcuni esempi per le proprietà elencate. Ad esempio, usando la doppia negazione, 'Non è vero che il ghiaccio non fonde a $0C$' è lo stesso che dire 'Il ghiaccio fonde a $0C$'. Le leggi di idempotenza in breve stabiliscono che non è necessario ripetere la stessa cosa due o più volte: non si direbbe nulla di nuovo. Il principio del terzo escluso stabilisce che data una proposizione qualsiasi, questa è vera oppure lo è la sua negazione. Praticamente è come dire che ogni proposizione matematica o è vera o è falsa: *tertium non datur*. Sulla stessa linea il principio di non contraddizione dice che non possono mai essere vere sia una proposizione che la sua negazione. Ad esempio, per il principio del terzo escluso, il numero 3 o è pari o è dispari. Per il principio di non contraddizione il numero 3 non può essere pari e dispari contemporaneamente. La proprietà commutativa è abbastanza chiara. Proprio come per i numeri, non importa in che ordine si congiungono o si disgiungono due proposizioni. Ad esempio 'L'acqua è inodore ed è incolore' asserisce lo stesso che 'L'acqua è incolore ed inodore'. Come esempio della proprietà transitiva si pensi ad esempio a 'Se ogni cittadino romano è italiano ed ogni cittadino italiano è europeo, allora ogni cittadino romano è europeo'. Veniamo ora alla prima legge delle inverse, delicata ed importantissima. Essa stabilisce che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è equivalente all'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, che è detta la *contronominale* di $p \Rightarrow q$. Consideriamo l'asserto 'Se un animale è un gatto, allora è un mammifero'. Questa equivale a dire che 'Se un animale non è un mammifero, allora non può essere nemmeno un gatto'. Si osservi che, in generale, data l'implicazione $p \Rightarrow q$, non si può dedurre nient'altro se non la sua contronominale. Ad esempio non è detto che valga $q \Rightarrow p$: se un animale è un mammifero, non è necessariamente un gatto, potrebbe infatti anche essere un cavallo.

Tecniche dimostrative

Quanto studiato sopra ci servirà ora per presentare le tecniche dimostrative che comunemente vengono usate in Matematica per provare teoremi ed asserzioni varie. Qui illustreremo la dimostrazione diretta, la prima legge delle inverse e la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo di voler dimostrare che una certa ipotesi I implica una tesi T. La *dimostrazione per via diretta* prevede di partire dall'asserzione I e di raggiungere la tesi T per mezzo di un numero finito di implicazioni successive logicamente accettabili. Lo schema dimostrativo è:

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T,$$

dove $p_1, \ldots, p_n$ sono proposizioni intermedie. La sua validità è garantita dalla proprietà transitiva dell'implicazione, vedi punto (vii), Proposizione 1.5. Prima di fare un esempio di una dimostrazione in cui è applicata questa tecnica, facciamo alcuni brevi richiami. Ricordiamo che un numero intero n si dice *pari* se esso è divisibile per 2, cioè esso può essere scritto come $n = 2h$, con h anch'esso intero. Un numero m invece si dice *dispari* quando non è divisibile per due. Nel paragrafo dedicato ai numeri interi proveremo che un numero dispari ha la forma $m = 2k + 1$, per qualche altro numero intero k. Èchiaro che un numero intero o è pari o è dispari: non ci sono altre possibilità. Infine, dati due numeri interi n ed m, diciamo che n è multiplo di m se possiamo scrivere n come prodotto di m per un altro numero intero t: $n = mt$. In tal caso si dice anche che n è *divisibile* per m. Proviamo il seguente risultato utilizzando la dimostrazione per via diretta.

Teorema 1.6. Sia n un numero intero. Se n è dispari, allora anche n^2 è dispari.

Dimostrazione diretta. Partiamo dall'ipotesi che n sia un numero dispari. Vogliamo provare che n^2 è anch'esso dispari. Siccome n è dispari, allora possiamo scrivere $n = 2k + 1$, con k numero intero. Allora $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Se poniamo $k' = 2k^2 + 2k$, allora $n^2 = 2k' + 1$. Ne segue che anche n^2 è un numero dispari. **QED**

La *prima legge delle inverse* suggerisce di dimostrare l'implicazione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta la *contronominale* di $I \Rightarrow T$, poiché per il punto (vi), Proposizione 1.5, esse sono equivalenti. Quindi se è vera una, è vera anche l'altra. Si parte in pratica dalla negazione della tesi e per mezzo di passaggi logici si raggiunge la negazione dell'ipotesi. Applichiamo questo metodo nel provare il seguente risultato.

Teorema 1.7. Sia n un numero intero. Se n non è multiplo di 3, allora n non è multiplo di 6.

Dimostrazione della contronominale. Partiamo dal supporre che sia vera la negazione della tesi, cioè che n è multiplo di 6. Dobbiamo far vedere che ne discende la negazione dell'ipotesi e quindi che n è anche multiplo di 3. Ora se $n = 6t$, per qualche intero t, allora $n = 3 \cdot 2t$, come volevamo dimostrare. **QED**

Una tecnica molto simile - si badi a non confonderle! - è la celebre *dimostrazione per assurdo*. Si parte dal fatto che sia vera la negazione della tesi $\overline{T}$ assieme all'ipotesi I. Il nostro compito diventa dunque raggiungere una contraddizione C, un asserto che è evidentemente falso e che non può essere tollerato facendo Matematica. Infatti, definendo l'implicazione logica, abbiamo detto che delle ipotesi vere non possono mai implicare il falso. Lo schema dimostrativo è:

$$[(I \wedge \overline{T}) \Rightarrow C] \Rightarrow T.$$

Facciamo qualche esempio.

Teorema 1.8. Sia n un numero intero. Se n^2 è dispari, allora anche n è dispari.

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo vera l'ipotesi e che la tesi sia falsa. Quindi n^2 è dispari e, per assurdo, n è pari. Allora $n = 2h$, per qualche h intero. Sicché $n^2 = 4h^2 = 2(2h^2)$ è pari anch'esso. Riassumendo n^2 è sia pari che dispari. Poiché questa è una contraddizione, la tesi deve necessariamente essere vera. **QED**

Per maggior chiarezza facciamo un altro esempio di dimostrazione in cui si applica la *reductio ad absurdum*. Dobbiamo richiamare prima alcune nozioni di geometria piana. Ricordiamo che due rette nel piano si dicono parallele se esse non hanno alcun punto in comune o, come si suol dire, esse non si incontrano mai. Il V postulato di Euclide per la geometria piana asserisce che se dati un punto P ed una retta r nel piano che non passa per P, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela alla retta r. Applicando la dimostrazione per assurdo proveremo la proprietà transitiva del parallelismo.

Teorema 1.9. Siano date r, s e t tre rette nel piano. Supponiamo che r è parallela a t e che anche t è parallela a s. Allora r ed s sono parallele.

Dimostrazione per assurdo. Assieme all'ipotesi che r ed s sono entrambe parallele a t, supponiamo per assurdo che r ed s non siano parallele tra loro. Ciò significa che le rette r ed s si incontrano in almeno un punto, chiamiamolo P. Siccome t è parallela ad r, t non può contenere il punto P. Riassumendo, abbiamo trovato che la retta r passa per P ed è parallela a t. Similmente anche s passa per P ed è parallela a t. Questo contraddice il V postulato, poiché abbiamo trovato due rette distinte r ed s parallele a t e passanti per P. **QED**

Dall'unione dei Teoremi 1.6 e 1.8 segue la seguente equivalenza:

Teorema 1.10. Sia n un numero intero. Allora n è dispari se e solo se n^2 è dispari.

Lo stesso risultato può essere riformulato anche come 'Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia dispari è che il suo quadrato sia dispari'.

Quando abbiamo una equivalenza $p \Leftrightarrow q$, è facile provare che vale anche $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$. Ad esempio possiamo dire che 'Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia pari è che il suo quadrato sia pari'.

Riprendiamo ora a dire quanto abbiamo accennato sopra. Bisogna fare attenzione a maneggiare ed invertire con cautela le implicazioni logiche. Dato un teorema $I \Rightarrow T$, l'unica implicazione che è automaticamente vera è il *teorema contronominale o contrapposto* $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$. Nulla si può dire a priori della verità del *teorema inverso o reciproco* $T \Rightarrow I$. Se è vero va dimostrato separatamente: non si può farlo discendere da $I \Rightarrow T$ immediatamente. Lo stesso vale per il *teorema contrario* $\overline{I} \Rightarrow \overline{T}$. Facciamo qualche esempio per chiarire quanto detto. Èben noto che vale l'implicazione 'Se un poligono è un quadrato, allora è un poligono regolare'. Il teorema inverso stabilisce che 'Se un poligono è regolare, allora esso è un quadrato'. Questo ovviamente è falso in generale. I triangoli equilateri ad esempio, non sono dei quadrati, ma sono comunque dei poligoni regolari con tre lati. Il teorema contrario invece asserisce che 'Se un poligono non è un quadrato, allora non è un poligono regolare'. Anche questa asserzione è falsa: esistono i pentagoni regolari che non sono quadrati tuttavia sono dei poligoni regolari. Si osservi ad ultimo che il teorema inverso e il teorema contrario sono tra loro equivalenti.

Le proposizioni della Matematica

Concludiamo questa parte introduttiva di Logica presentando come vengono etichettate le proposizioni in Matematica. Abbiamo già presentato i concetti primitivi ed i postulati come il punto di partenza da cui inizia il discorso matematico.

Si chiama *Definizione* una proposizione in cui si introduce un nuovo oggetto in termini di altri che sono stati presentati e studiati precedentemente. Ad esempio, supponiamo di sapere già cosa è un rettangolo, un quadrilatero che ha quattro angoli retti. A questo punto è possibile definire il quadrato in termini del rettangolo che già si conosce: 'Si definisce quadrato un rettangolo che ha tutti e quattro i lati uguali'.

Una *Proposizione* propriamente detta, è una asserzione che contiene un'implicazione in cui vengono stabilite delle proprietà di un certo oggetto. Esse necessitano di una dimostrazione rigorosa che segua un metodo valido accettato dalla Logica. Ne sono esempi i vari risultati sui numeri pari e dispari che abbiamo provato sopra. Spesso le proposizioni vengono denominate *Teoremi* quando racchiudono un risultato molto importante e fondamentale per il discorso matematico. Un *Lemma* è una proposizione preliminare, che contiene un risultato che serve ad abbreviare le dimostrazioni dei risultati che lo seguono. Un *Corollario* infine è una proprietà che segue immediatamente da un risultato precedente la cui dimostrazione è banale e spesso la si riassume in una sola riga.

Logica predicativa

La parte della Logica che abbiamo studiato finora si chiama Logica proposizionale. D'ora in poi lavoreremo con un tipo particolare di enunciati che sono molto importanti in Matematica: i predicati. Chiameremo *predicato logico* un'espressione linguistica $p(x, y, \dots)$ che dipende dai parametri $x, y, \dots$ e di cui si può decidere il valore di verità non appena si "rimpolpano i parametri con oggetti concreti" †. Un esempio è il predicato 'Oggi è Lunedì'. Così come è formulato, questo enunciato non è una proposizione nel senso matematico. Infatti giorno dopo giorno il suo valore di verità cambia e non si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa. Se al posto del parametro *oggi* sostituiamo un giorno in particolare, tale enunciato diventa una proposizione. Ad esempio 'Il 23 Settembre 2013 è Lunedì' è una proposizione ed è vera. In questo modo il predicato $p(\text{oggi})$ è diventato la proposizione $p(\text{23 Settembre 2013})$.

I parametri da cui dipende un predicato assumono valori all'interno di un opportuno *insieme di variabilità*. Ad esempio nel predicato $p(\text{oggi})$, il parametro *oggi* assume valori nell'insieme dei vari giorni. Per limitare o controllare tale variabilità vengono molto spesso utilizzati i *quantificatori*. La loro utilità risiede nel fatto che aiutano a determinare velocemente la veridicità, senza dover necessariamente sostituire tutti i possibili valori che il parametro può assumere. Si utilizzano il quantificatore universale $\forall$, che si legge *per ogni*, ed il quantificatore esistenziale $\exists$, leggi *esiste*. Ad ultimo diciamo che per scrivere *non esiste* si usa il simbolo $\nexists$. Consideriamo le frasi seguenti: 'Ogni insetto è una farfalla' ed 'Esistono due numeri interi la cui somma vale -2'. In linguaggio matematico si riscrivono rispettivamente come $p(n)$: '$\forall$ insetto n, n è una farfalla' e $q(x, y)$: '$\exists\, x \wedge \exists\, y$ numeri interi tali che $x + y = -2$'. L'insieme di variabilità di $p(n)$, predicato ad una variabile, è l'insieme di tutti gli insetti. I parametri del predicato a due variabili $q(x, y)$ variano nell'insieme dei numeri interi. Il primo predicato è falso,

† Citazione dal libro *Il diavolo in cattedra*, P. Odifreddi, Einaudi

infatti p(ape) non è vera: non è verificata l'universalità. Il secondo invece è vero poiché è vero $q(-4, 2)$; si ha $-4 + 2 = -2$.

È molto importante imparare a negare correttamente i predicati soprattutto in presenza dei quantificatori. Una errata applicazione delle regole che illustreremo ora è alla base di numerosissimi ed imperdonabili errori che spesso gli studenti (e non solo) compiono nello svolgere esercizi e nel dimostrare risultati.

Proviamo ora a negare il predicato 'Tutti i gatti sono persiani'. Dire che ciò non è vero, non significa che *nessun* gatto è persiano o che tutti i gatti non sono persiani (imprecisione molto diffusa!), significa invece esibire *almeno un* gatto che non è un persiano, così da violare l'universalità del 'tutti'. Esistono ad esempio i gatti soriani ed i siamesi. Si badi che i gatti potrebbero essere anche tutti 'non persiani', ma a noi per negare il 'tutti' basta sapere che ce n'è almeno uno che non è persiano. Supponiamo di avere in generale il predicato $P(x) : \forall\ x$ è vera la proprietà $p(x)$. Negare una proprietà universale equivale a dire che esiste almeno un dissidente che viola tale proprietà, ovvero che verifica la negazione di questa proprietà. Quindi $\overline{P(x)}$: $\exists\ x$ per cui è vera la proprietà $\overline{p(x)}$.

Consideriamo ora la frase 'Esiste un triangolo rettangolo che è isoscele'. Negare questo significa dire che di tutti i triangoli rettangoli che si possono considerare, nessuno è isoscele. Non ci basta che uno solo non sia isoscele, vogliamo che nessuno di essi lo sia. La negazione del quantificatore esistenziale coinvolge quindi quello universale. Supponiamo di avere in generale il predicato $Q(x)$: $\exists\ x$ per cui è vera la proprietà $q(x)$. Negare ciò significa dire che tutti gli oggetti violano tale proprietà, ovvero che tutti verificano la negazione di questa proprietà. Quindi $\overline{Q(x)} : \forall\ x$ è vera la proprietà $\overline{q(x)}$. Riassumendo abbiamo quindi la seguente regola:

$$\overline{\forall\ x : p(x)} \Leftrightarrow \exists\ x : \overline{p(x)} \qquad \text{e} \qquad \overline{\exists\ x : p(x)} \Leftrightarrow \forall\ x : \overline{p(x)}.$$

Ai quantificatori studiati si è soliti aggiungerne un altro. Èspesso necessario precisare quando l'esistenza di un oggetto è unica. Si usa in questo caso $\exists!$ che si legge *esiste ed è unico*. Ad esempio va usato nella formulazione del celeberrimo Quinto Postulato di Euclide: 'Dati nel piano un punto P ed una retta r, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela ad r'. Si deve fare attenzione quando si nega l'esistenza unica. Dire infatti che 'non esiste un unico x che verifica $p(x)$' può da un lato significare che 'non esiste alcun x che verifica $p(x)$' oppure che 'esiste più di un x che verifica la proprietà $p(x)$'. Sempre considerando il quinto postulato di Euclide, storicamente negando esso sono nate le *geometrie non euclidee*. La geometria che nega del tutto l'esistenza della retta parallela s si chiama geometria ellittica, quella che ne ammette l'esistenza, ma che ne nega l'unicità, si chiama geometria iperbolica.

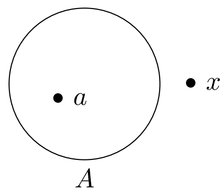
1.2 Teoria elementare degli insiemi

In questa sezione ci occuperemo di presentare alcuni argomenti elementari scelti di Teoria degli insiemi, imprescindibili per una buona formazione matematica.

Insiemi e sottoinsiemi

La Matematica si fonda su un importantissimo concetto primitivo, il concetto di *insieme* che può essere pensato come una collezione, un aggregato di certi oggetti, concreti o astratti, che chiameremo i suoi *elementi*. Come di consueto useremo le lettere maiuscole $A, B, X, \dots$ per indicare gli insiemi, quelle minuscole $a, b, x, \dots$ per gli elementi.

Per dire che l'elemento a *appartiene* all'insieme A scriveremo $a \in A$, per dire invece che l'elemento x non appartiene ad A si scrive $x \notin A$. Si dice anche che l'insieme A *contiene* l'elemento a e che non contiene x. Per lavorare più intuitivamente con gli insiemi ci si serve dei *diagrammi di Eulero-Venn*. Un insieme viene rappresentato con un cerchio, i suoi elementi vengono rappresentati al suo interno, gli oggetti che non gli appartengono al suo esterno. Ovviamente un oggetto dato o appartiene o non appartiene ad un insieme, non ci sono altre possibilità. Riconsideriamo l'insieme A preso sopra che contiene a ma non x. Graficamente abbiamo:



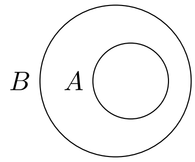
Gli insiemi possono essere rappresentati anche per via *estensiva* o per *elencazione* scrivendo esplicitamente tutti i suoi elementi. Ad esempio, l'insieme P delle province della Puglia può essere scritto come $P = \{\,\text{Bari, BAT, Brindisi, Foggia, Lecce, Taranto}\,\}$. Si può anche utilizzare la rappresentazione per via *intensiva* o per *caratteristica* dove ci si serve di un predicato per descrivere tutti gli elementi in un colpo solo. Ad esempio l'insieme P delle province pugliesi diventa $P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$ che si legge 'P è l'insieme delle x tali che x è una provincia della Puglia'. Ci siamo serviti del predicato $p(x)$: 'x è una provincia della Puglia'. *A latere* sottolineiamo che il simbolo $\mid$ viene letto *tale che*. Spesso, per abbreviare questa espressione, si usano il simbolo : come anche l'acronimo *t.c.*, ma mai nella descrizione intensiva di un insieme in cui si usa sempre $\mid$. Diremo che l'insieme A è *sottoinsieme* dell'insieme B (o che A è contenuto in B) e scriveremo $A \subseteq B$, se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. Formalmente si scrive

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A : \ x \in B.$$

I due punti in questo caso si leggono *risulta che*.

L'insieme $P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$ è sottoinsieme dell'insieme $I = \{\, x \mid x \text{ è una provincia italiana} \,\}$.

Graficamente abbiamo



in maniera tale che gli oggetti racchiusi dal bordo di A sono necessariamente circondati anche da quello di B. Se A non è contenuto in B si scrive che $A \nsubseteq B$, in altri termini esiste $x \in A$ tale che $x \notin B$.

Il *principio di uguaglianza tra gli insiemi* stabilisce che due insiemi sono uguali se e solo se uno è sottoinsieme dell'altro. In altre parole:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A.$$

Essi hanno quindi esattamente gli stessi elementi. Quando si vorrà dimostrare che due insiemi sono uguali bisognerà far vedere vicendevolmente che uno è sottoinsieme dell'altro. Può accadere che un insieme A sia sottoinsieme di un insieme B, ma che essi non siano uguali. Questo vuol dire che tutti gli elementi di A sono elementi di B, ma che esiste un elemento di B che non è elemento di A. In tal caso si dice che A è strettamente contenuto in B e si scrive $A \subset B$ oppure $A \subsetneq B$ se si vuole enfatizzare che non sono uguali.

Abbiamo bisogno di altri due importanti assiomi: da un lato l'esistenza dell'*insieme vuoto*, $\varnothing$, un insieme che non contiene alcun elemento, e dall'altro, l'esistenza dell'*insieme universo*, U, che invece contiene tutti gli oggetti. L'insieme U solitamente viene indicato nei diagrammi con un rettangolo.

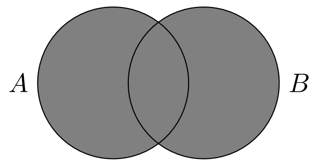
Operazioni tra insiemi

Come con le proposizioni e con i numeri, si può operare anche con gli insiemi.

Dati due insiemi A e B, chiameremo *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ costituito da tutti gli elementi di A o di B presi insieme:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

Graficamente l'unione è la parte colorata in figura:

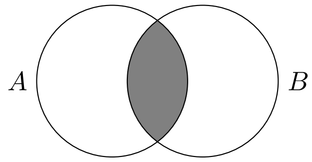


Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, la loro unione è l'insieme $A \cup B = \{ 1, 2, a, b, c \}$. Ovviamente le ripetizioni vanno cancellate.

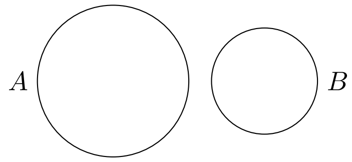
Dati due insiemi A e B, chiameremo *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni di A e di B:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Graficamente l'intersezione è la parte colorata in figura:



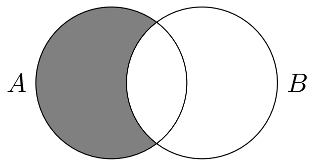
Dati $A = \{1, 2, a, b\}$ e $B = \{1, c\}$, la loro intersezione è l'insieme $A \cap B = \{1\}$. Quando due insiemi A e B non hanno alcun elemento in comune, accade che $A \cap B = \varnothing$ e si dice che A e B sono *disgiunti*. Graficamente si hanno due cerchi separati che non si toccano:



È possibile definire anche la differenza tra due insiemi. Dati due insiemi A e B, chiameremo *differenza* di A e B l'insieme $A \setminus B$ costituito dagli elementi di A che non sono elementi di B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Graficamente è la parte colorata in figura:

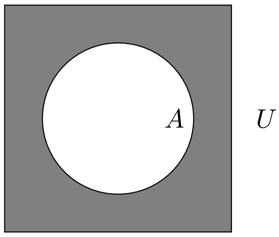


Dati $A = \{1, 2, a, b\}$ e $B = \{1, c\}$, si ha che $A \setminus B = \{2, a, b\}$. Si osservi che in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$. Infatti nel nostro caso $B \setminus A = \{c\}$.

Diamo un'ultima importantissima definizione. Dato un insieme A, si definisce il *complementare* di A, indicato con $\overline{A}$, l'insieme costituito da tutti gli oggetti che non sono in A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Per rappresentarlo graficamente ci si serve dell'insieme universo:



Inoltre vale la seguente uguaglianza $A \smallsetminus B = A \cap \overline{B}$ (lo si provi per esercizio).

Non deve sfuggire il fatto che l'unione è stata definita a partire dalla disgiunzione di due predicati, l'intersezione dalla congiunzione ed il complementare dalla negazione. Infatti la Logica e la Teoria degli insiemi sono strettamente interconnesse tra loro. A partire dalle proprietà viste per i connettivi logici si possono dedurre le analoghe proprietà per le operazioni tra insiemi. Enunceremo solamente il seguente risultato che è l'analogo della Proposizione 1.5, un'idea della dimostrazione è nell'Esercizio 1.17.

Proposizione 1.11. *Siano A, B e C insiemi. Allora:*

(i) $\varnothing \subseteq A$ *(il vuoto è contenuto in ogni insieme)*

(ii) $A \subseteq A$ *(ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso)*

(iii) $A \cap \varnothing = \varnothing$ *e* $A \cup \varnothing = A$

(iv) $\overline{\overline{A}} = A$

(v) $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$ *(legge d'idempotenza)*

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

(vii) $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$ *(proprietà commutativa)*

(viii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(proprietà associativa)*

(ix) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *e* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(leggi di De Morgan)*

Dato un insieme A, indicheremo con $\mathcal{P}(A)$ l'*insieme delle parti* di A i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A. In particolare $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ ed $A \in \mathcal{P}(A)$.

Ad esempio $\mathcal{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$ perché l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso. Se consideriamo $A = \{ 1 \}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \} \}$. Infine, se prendiamo l'insieme $B = \{ a, b \}$, allora $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$.

Dati un insieme A ed un suo elemento a, si deve fare attenzione a distinguere l'elemento a dall'insieme $\{ a \}$, che è l'insieme costituito dal solo elemento a. Non si deve far confusione tra i simboli che abbiamo introdotto sopra. Ad esempio sono giuste le scritture $a \in A \Leftrightarrow \{ a \} \subseteq A \Leftrightarrow \{ a \} \in \mathcal{P}(A)$ e $a \in \{ a \}$. Non hanno invece alcun senso $a \subseteq A$, $a \subseteq \{ a \}$, $a \in \mathcal{P}(A)$ e $\{ a \} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Un'altra importante operazione che si può definire tra insiemi è il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, definiamo il *prodotto cartesiano* di A e B, l'insieme

$A \times B$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* costituite da un elemento di A ed un elemento di B. Più precisamente

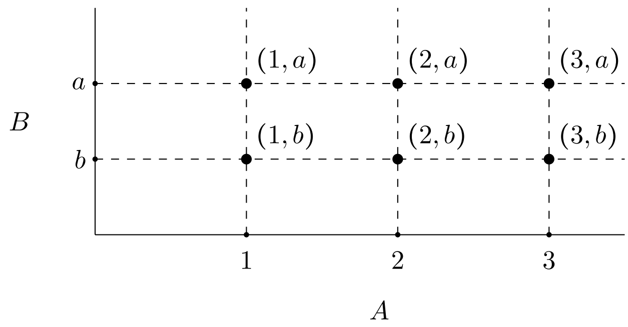
$$A \times B = \{\, (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \,\} .$$

Se $A = B$, allora si è soliti porre per analogia con i numeri $A \times A = A^2$.

Esempio 1.12. Siano dati gli insiemi $A = \{\, 1,2,3 \,\}$ e $B = \{\, a,b \,\}$. Allora si ha che $A \times B = \{\, (1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b) \,\}$.

Anche il prodotto cartesiano di due insiemi ha diritto ad una sua rappresentazione grafica. I due insiemi *fattori* vengono schematizzati con due rette perpendicolari. I loro elementi vengono poi rappresentati con dei punti su tali rette. Si costruisce così una rete a maglie rettangolari i cui nodi sono le coppie ordinate, elementi del prodotto cartesiano. Questa rappresentazione è detta *cartesiana.*

Riprendendo l'esempio precedente, si ottiene:



Si può definire il prodotto cartesiano anche di tre o più insiemi in maniera analoga. Dati gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, definiamo il loro prodotto cartesiano l'insieme:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1,a_2,\dots,a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n \,\} .$$

Il generico elemento $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ è detto n-upla ordinata. Il *principio di identità* delle n-uple ordinate stabilisce che, prese due n-uple ordinate $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ e $(b_1,b_2,\dots,b_n)$, esse sono uguali se e solo se sono uguali ordinatamente le componenti omologhe, cioè

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) = (b_1,b_2,\dots,b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

1.3 Funzioni

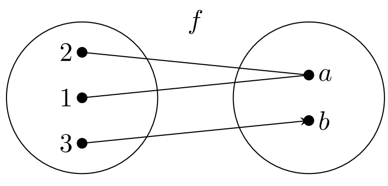
In Matematica si considerano spesso degli insiemi tra i cui elementi sussiste una certa relazione, un certo legame. Ne è esempio il confronto tra numeri reali: nel linguaggio formale questo è una *relazione d'ordine.* Più in generale, dati due insiemi A e B, si definisce *relazione* tra gli insiemi A e B un qualsiasi sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. A seconda di opportune proprietà che vengono verificate dagli elementi di $\mathcal{R}$, si parla di *relazioni di equivalenza*, *relazioni d'ordine*, *relazioni funzionali* o più semplicemente *funzioni*. Per i limiti posti dal presente testo ci concentreremo brevemente su queste ultime. Dati due insiemi non vuoti A e B, si definisce *funzione* da A a B una relazione $\mathcal{R}$ tra i due insiemi che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere uno ed un solo $y \in B$. Allora formalmente abbiamo:

$$\mathcal{R} \subset A \times B \text{ è una funzione} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in A\ \exists!\, y \in B : \ (x,y) \in \mathcal{R}.$$

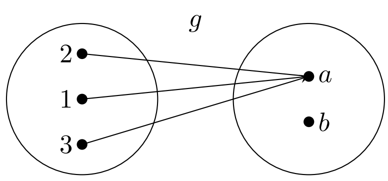
Si è soliti indicare le funzioni con le lettere $f, g, \ldots$. Presa quindi una funzione f da un insieme A ad un insieme B si scrive $f : A \to B$ e si legge 'f funzione da A a B'. Se x è un elemento di A a cui corrisponde l'elemento $y \in B$, si scrive $f : x \mapsto y$ (leggi 'f associa y ad x') o anche $y = f(x)$ e si dice che y è l'*immagine* di x sotto f. L'insieme A viene chiamato in uno dei seguenti modi: *dominio* di f, *insieme di partenza*, *campo di esistenza*, *insieme di definizione*. L'insieme B è detto *insieme di arrivo*.

Esempio 1.13. Dati gli insiemi $A = \{\,1,2,3\,\}$ e $B = \{\,a,b\,\}$, un esempio di funzione tra A e B è $f = \{\,(1,a),(2,a),(3,b)\,\}$. Infatti tutti gli elementi di A compaiono in almeno una coppia ed in particolare compaiono in una sola coppia. Si osservi che nulla ci importa degli elementi di B: nelle coppie che costituiscono f, essi possono comparire tutti oppure no e possono figurare in più coppie ordinate. Anche $g = \{\,(1,a),(2,a),(3,a)\,\}$ è una funzione tra A e B. Non è una funzione invece la relazione $h = \{\,(1,a),(2,a),(2,b)\,\}$. Infatti l'elemento $3 \in A$ non compare in nessuna coppia ordinata; per di più l'elemento 2 compare in due coppie ordinate: ad esso corrispondono sia a che b.

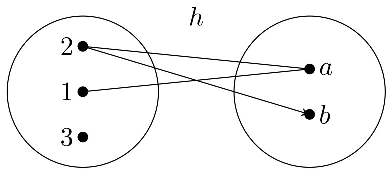
Le relazioni possono essere rappresentate graficamente per via *sagittale*, usando cioè delle frecce. In particolare data una relazione $\mathcal{R}$, se la coppia $(a,b) \in \mathcal{R}$, si collega con una freccia l'elemento a con l'elemento b. Nella rappresentazione sagittale delle funzioni da ogni elemento del dominio parte una ed una sola freccia che colpisce un qualche elemento dell'insieme B. Riprendiamo le relazioni dell'Esempio 1.13. La rappresentazione sagittale di f è



quella di g è



infine quella di h è



In particolare, da quest'ultimo diagramma si capisce che la relazione h non è una funzione. Infatti, dal punto 3 non parte alcuna freccia e dal punto 2 ne partono due.

Data una funzione $f : A \to B$, ha particolare importanza il sottoinsieme di B definito come

$$f(A) = \{ \, y \in B \mid \exists \; x \in A : \; y = f(x) \, \}$$

o equivalentemente

$$f(A) = \{ \, f(x) \in B \mid x \in A \, \} \, .$$

Esso è costituito da tutti gli elementi di B che sono immagine mediante f di almeno un $x \in A$. Pensando alla rappresentazione sagittale, possiamo pensare ad $f(A)$ come all'insieme di tutti gli elementi di B che sono colpiti dalle frecce. Questo insieme è detto *codominio* di f, *rango* di f o *immagine* di f. A volte si usa anche il simbolo $Im(f)$ per indicarlo. Ripensando alle funzioni f e g considerate nell'Esempio 1.13, si ha $Im(f) = \{ \, a, b \, \} = B$ e $g(A) = \{ \, a \, \}$. Spesso per motivi di compattezza si è soliti definire le applicazioni (come in generale le relazioni) per mezzo di un predicato. Ad esempio, consideriamo l'insieme S degli Stati Uniti e l'insieme C delle città statunitensi. Consideriamo la funzione F che ad ogni stato $s \in S$ associa la sua capitale c. Questa è in effetti una funzione poiché ogni stato federato ha un'unica capitale. Formalmente stiamo considerando il predicato $p(c, s)$:'c è capitale di s' e la relazione $F = \{ \, (c, s) \in C \times S \mid p(c, s)$ è vero $\}$. In maniera compatta quindi stiamo rappresentando ben 52 coppie ordinate senza doverle esplicitare. Questa descrizione intensiva è spesso usata in Matematica dove si fa largo uso di predicati che sono *leggi matematiche*. Ad esempio la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z} \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$ è la funzione che ad ogni numero intero a associa il suo doppio $2a$.

Nella classe delle funzioni è importante distinguerne alcune che godono di importanti proprietà. Una funzione $f : A \to B$ è detta *costante* se

$$\forall \, x \in A : \; f(x) = b, \; \text{con } b \in B.$$

In breve una funzione costante manda tutti gli elementi del dominio A nello stesso elemento b dell'insieme di arrivo B. Ne è esempio la funzione g considerata nell'Esempio 1.13.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se ad ogni coppia di elementi distinti del dominio corrispondono due elementi distinti del codominio. Formalmente abbiamo che f è iniettiva se e solo se

$$\forall \; x_1, x_2 \in A : \qquad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Questa condizione equivale all'implicazione

$$\forall\ x_1, x_2 \in A: \qquad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

La funzione F considerata sopra, che associa ad ognuno degli Stati Uniti la sua capitale, è una funzione iniettiva: due Stati distinti non possono avere la stessa città capitale. Le funzioni f e g dell'Esempio 1.13 invece non lo sono. Graficamente una funzione iniettiva la si riconosce se due frecce distinte non colpiscono mai lo stesso bersaglio.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* quando $f(A) = B$, ovvero tutti gli elementi dell'insieme B sono immagine di qualche elemento del dominio A. Formalmente abbiamo che f è suriettiva se e solo se

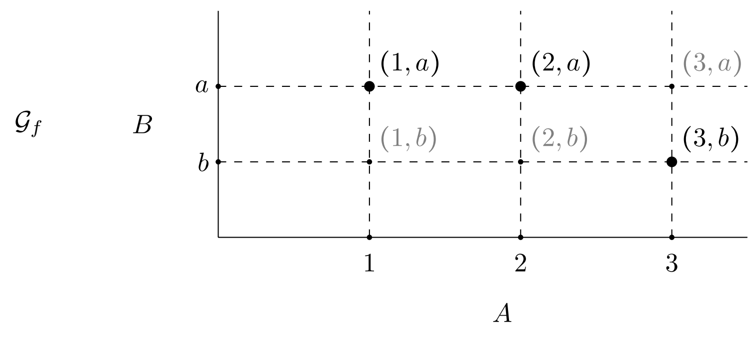
$$\forall\ y \in B\ \exists\ x \in A: \ y = f(x).$$

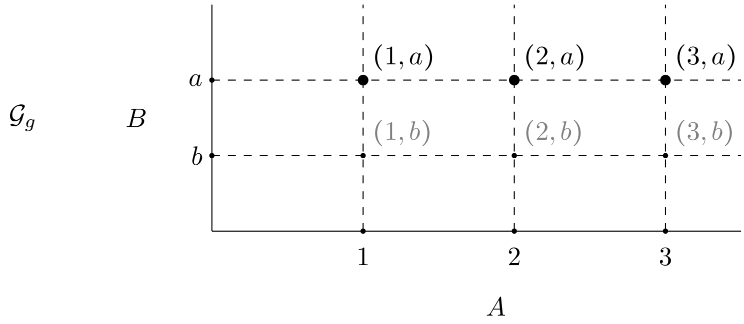
Graficamente una funzione suriettiva la si riconosce se tutti gli elementi dell'insieme di arrivo sono colpiti da almeno una freccia. Nell'esempio 1.13, la funzione f è suriettiva, la funzione g non lo è.

Una funzione che è sia iniettiva che suriettiva si dice *biettiva* o *biunivoca*. Formalmente abbiamo che una funzione $f : A \to B$ è biettiva se e solo se $\forall\ y \in B\ \exists!\ x \in A : y = f(x)$. Graficamente una funzione biettiva la si riconosce se tutti gli elementi dell'insieme di arrivo sono colpiti da esattamente una freccia. A questo proposito, si dice anche che le funzioni biunivoche sono delle *corrispondenze uno ad uno*, nel senso che ad ogni elemento del dominio corrisponde un elemento dell'insieme di arrivo e, viceversa, ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di un solo elemento del dominio. Si pensi ad esempio alla funzione che ad ogni cittadino italiano associa il suo codice fiscale oppure alla funzione che, fissata una retta r nel piano, associa ad ogni punto P del piano il suo simmetrico rispetto ad r. Entrambe le funzioni f e g dell'esempio 1.13 non sono biettive.

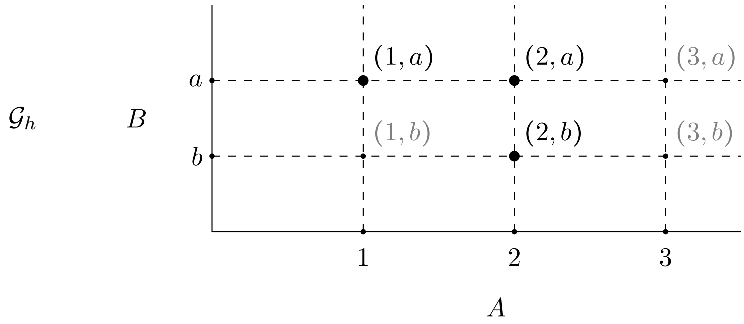
Poiché ogni funzione $f : A \to B$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, è possibile rappresentare anche f in forma cartesiana. Si chiama *grafico* di f l'insieme $\mathcal{G}_f = \{\ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\ \}$. La sua rappresentazione cartesiana è costituita dai soli punti del grafico di $A \times B$ che sono in $\mathcal{G}_f$.

Esempio 1.14. Consideriamo le funzioni f e g dell'Esempio 1.13. I loro grafici cartesiani sono rispettivamente:





Èistruttivo mostrare il grafico cartesiano della relazione non funzionale h dell'Esempio 1.13 per imparare a riconoscere sottoinsiemi del prodotto cartesiano che non possono essere grafici di funzione.



Questo diagramma non può essere il grafico di una funzione poiché *sopra* 2 ci sono due punti nel grafico di h e sopra 3 invece non ce n'è alcuno.

1.4 Insiemi numerici

In questo paragrafo presenteremo i più importanti insiemi numerici richiamandone brevemente le proprietà.

Numeri Naturali

Indicheremo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei *numeri naturali*, i numeri utilizzati per contare le quantità presenti in natura:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} .$$

I numeri naturali sono infiniti, hanno un minimo, il numero 0, e non ammettono un massimo. È possibile sia sommare che moltiplicare due numeri naturali ottenendone un terzo che è ancora un numero naturale. Si dice infatti che addizione e moltiplicazione sono operazioni interne sui numeri naturali. Storicamente si chiama *Aritmetica* quella parte della Matematica che studia i numeri naturali.

Quando si moltiplica n volte un numero naturale a per sé stesso, per brevità si usa la notazione potenza a^n. Diremo che a è la *base* e che n è l'*esponente* della potenza. Si pone per comodità $a^0 = 1$. Le potenze godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 1.15. *Siano a, b, n, m numeri naturali. Allora*

(i) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

(ii) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(iii) $(a^n)^m = a^{nm}$

Numeri Interi Relativi

Purtroppo non sempre si può eseguire la differenza tra due numeri naturali. Ad esempio il calcolo $1 - 3$ è impossibile in $\mathbb{N}$. Per questo l'insieme dei numeri naturali viene ingrandito aggiungendo i numeri negativi. Con $\mathbb{Z}$ indicheremo l'insieme dei *numeri interi relativi*, i cosiddetti numeri 'col segno':

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} .$$

Si indica con $-a$ l'opposto di a, il numero che si ottiene cambiando il segno di a. Allora $a + (-a) = a - a = 0$. Diremo che il numero 0 non ha segno. I numeri che presentano il segno meno sono detti *negativi*, quelli che presentano il segno più (a volte omesso) sono detti *positivi.* Anche $\mathbb{Z}$ è un insieme infinito, esso però non ha né massimo né minimo. In questo insieme si possono calcolare senza difficoltà la somma, il prodotto (si ricordi la *regola dei segni*) e la differenza tra due numeri. Si vede facilmente che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Come in $\mathbb{N}$, si definisce la potenza con esponente naturale anche dei numeri interi. Questa gode delle stesse proprietà viste nella Proposizione 1.15 per la potenza in $\mathbb{N}$. Osserviamo che le potenze ad esponente pari producono sempre un risultato positivo, le potenze ad esponente dispari invece conservano lo stesso segno della base.

Una proprietà molto importante dei numeri interi è che essi possono essere *confrontati*, cioè si può stabilire tra due numeri interi qual è il maggiore. Presi due numeri interi a e b, si dice che a è minore o uguale a b, $a \leqslant b$, se esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $b = a + h$. In tal caso si dice anche che b è maggiore o uguale ad a, $b \geqslant a$. Se $a \leqslant b$ e $a \neq b$, allora si scrive $a < b$, a è (strettamente) minore di b. Simmetricamente si dice che b è (strettamente) maggiore di a, $b > a$. I numeri maggiori di 0 sono proprio i numeri *positivi*, quelli minori di 0 i *negativi.* Dato un numero intero qualsiasi a, vale *la legge di tricotomia*: è vera solo una delle condizioni $a < 0$, $a = 0$ oppure $a > 0$. Il confronto tra numeri gode della seguente importante proprietà:

Proposizione 1.16 (Principio delle diseguaglianze)**.** *Siano a e b numeri interi tali che $a < b$. Sia infine $c \in \mathbb{Z}$. Allora $a + c < b + c$. Inoltre se $c > 0$ si ha che $ac < bc$, se invece $c < 0$ allora $ac > bc$. Analogamente se $a \leqslant b$.*

Si ricordi quindi che moltiplicare per un numero positivo, lascia il verso delle diseguaglianze invariato, mentre moltiplicare per i numeri negativi lo cambia.

Si definisce valore assoluto di un numero intero b la quantità $|b|$ che è uguale a b stesso se b è positivo, a $-b$ se invece b è negativo. Il valore assoluto di un numero è quindi sempre un numero positivo. Inoltre si ha che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$: $|ab| = |a||b|$ e che $|a| + |b| = 0$ se e solo se $a = b = 0$.

In $\mathbb{Z}$ è possibile eseguire una fondamentale operazione, la *divisione col resto.*

Lemma 1.17 (Lemma della divisione euclidea)**.** *Siano a e b due numeri interi con $b \neq 0$. Allora esistono e sono unici due numeri interi q ed r, detti rispettivamente* quoziente *e* resto *della divisione, tali che $a = bq + r$ e $0 \leqslant r < |b|$.*

Ad esempio, 14 diviso per 3 dà 4 con resto di 2, cioè $14 = 3 \cdot 4 + 2$. Se si lavora con numeri negativi si deve fare attenzione a prendere sempre un resto positivo. Si trova che -14 diviso per 3 dà -5 col resto di 1: $-14 = 3 \cdot (-5) + 1$.

Sfruttando la divisione con resto, vogliamo formalizzare la definizione di numero pari e dispari che abbiamo dato *en passant* nei paragrafi precedenti. Se dividiamo un numero intero a per 2 otteniamo come resto o 0 od 1. Se otteniamo 0 si dice che a è *pari*, se otteniamo 1 come resto invece diremo che a è *dispari*. I numeri pari sono quindi della forma $2m$, per qualche intero m, quelli dispari della forma $2n + 1$, con n intero.

Tra i numeri interi esiste una classe molto importante, quella dei numeri primi.

Definizione 1.18. Sia $p \in \mathbb{N}$, con $p \neq 0, 1$. Si dice che p è un numero primo se è divisibile soltanto per 1 e per sé stesso.

Esempi di numeri primi sono $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Non sono numeri primi invece $10 = 2 \cdot 5$, $4 = 2^2$ e tutte le potenze dei numeri diversi da 0 ed 1. Non è pleonastico sottolineare che 1 *non* è un numero primo: la Definizione 1.18 lo esclude esplicitamente. Quindi il più piccolo numero primo è 2 che è inoltre, l'unico numero primo pari. Un buon esercizio è conoscere a memoria almeno i numeri primi minori di 100.

Come applicazione del Lemma di divisione euclidea possiamo dimostrare questo curioso risultato.

Esercizio 1.2. Sia $p \geqslant 5$ un numero primo. Allora p è della forma $6k + 1$ o $6k + 5$, per qualche numero naturale k.

Svolgimento. Per dimostrare questo fatto, effettuiamo la divisione con resto di p per 6. In tal modo si ottiene $p = 6k + r$, dove $k \geqslant 0$ ed r può assumere i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Il caso $r = 0$ è da escludere, altrimenti $p = 6k$ è divisibile per 6 e non può essere primo. Il caso $r = 2$ è anch'esso da escludere. Infatti, se per assurdo $p = 6k + 2 = 2(3q + 1)$, si ha che 2 è un divisore di p mentre per ipotesi p è un numero primo. Analogamente sono da escludere $r = 3, 4$. Restano i casi $r = 1, 5$. La dimostrazione è così conclusa.

Ad esempio abbiamo che $5 = 6 \cdot 0 + 5$, che $7 = 6 \cdot 1 + 1$ e che $17 = 6 \cdot 2 + 5$. Si faccia attenzione che quella enunciata è solo una condizione necessaria affinché p sia primo, non è invece un criterio sufficiente di primalità. Infatti il numero $6 \cdot 4 + 1 = 25$ è della forma $6k + 1$, ma non è un numero primo.

I numeri primi godono di una proprietà molto importante nella Teoria dei numeri: essi possono essere pensati come i mattoni a partire dai quali si costruiscono tutti gli altri numeri interi.

Teorema 1.19 (Teorema fondamentale dell'Aritmetica)**.** Sia $a \in \mathbb{N}$ con $a \neq 0, 1$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a = {p_1}^{t_1}{p_2}^{t_2} \cdots {p_n}^{t_n}$, dove i $p_1, p_2, \ldots p_n$ sono numeri primi distinti univocamente determinati e gli esponenti $t_1, t_2 \ldots t_n$ sono numeri naturali non nulli. In particolare tale rappresentazione è *essenzialmente unica*, nel senso che può al più cambiare l'ordine dei fattori.

Ad esempio $2 = 2$; $10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$; $18 = 2 \cdot 3^2 = 3^2 \cdot 2$. Ora è più chiaro perché si deve scartare 1 dalla lista dei numeri primi. Se 1 fosse un numero primo, non sarebbe più valida l'unicità della scomposizione in fattori primi garantita dal Teorema fondamentale dell'Aritmetica. Ad esempio, si avrebbe: $18 = 2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1^2 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1^3 \cdot 2 \cdot 3^2 = \ldots$. Il Teorema 1.19 in breve stabilisce un fatto bene noto: che è sempre possibile scrivere la fattorizzazione in numeri primi di un qualsiasi numero naturale diverso da 0 e da 1.

Numeri Razionali

Il fatto che a volte in $\mathbb{Z}$ si produce un resto nella divisione, significa che non sempre si ottiene un numero intero quando si divide un numero intero per un altro. Si è soliti dire che la divisione non è una operazione interna in $\mathbb{Z}$. Per questo si introduce l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \right\}.$$

Presa la *frazione* $\frac{a}{b}$, si dice che a è il *numeratore* e che b è il *denominatore*.

Preso $c \in \mathbb{Z}$, con $c \neq 0, 1$ le due frazioni $\frac{ac}{bc}$ e $\frac{a}{b}$ possono essere identificate così da rappresentare lo stesso numero razionale. Per far questo si cancella, semplificandolo, il fattore comune c dal numeratore e dal denominatore. Per comodità, preso un numero razionale $\frac{a}{b}$, supporremo che il numeratore a ed il denominatore b non contengono alcun fattore in comune (si dice anche che a e b sono *coprimi*). In tal caso la frazione viene detta *ridotta ai minimi termini.*

Un numero intero $a \in \mathbb{Z}$ può essere identificato con la frazione $\frac{a}{1}$ che ha 1 per denominatore. In questo modo si vede che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

In $\mathbb{Q}$ si possono effettuare tutte le operazioni di addizione, moltiplicazione, differenza e divisione tra numeri. Si ricordi però che come in $\mathbb{Z}$, nemmeno in $\mathbb{Q}$ si può effettuare la divisione per 0: si ottiene in questo caso una quantità priva di significato. Le quattro operazioni citate godono di ben note proprietà che non elenchiamo per motivi di brevità. Ci preme piuttosto dire che anche in $\mathbb{Q}$ si definiscono il valore assoluto ed il confronto tra numeri che godono delle analoghe proprietà viste in $\mathbb{Z}$. Si è soliti indicare con $\frac{1}{a}$ oppure con a^{-1} il *reciproco* di un numero razionale $a \neq 0$. Risulta che $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

In $\mathbb{Q}$ si possono anche calcolare le potenze ad esponente intero negativo. Preso un numero razionale $q \neq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$, si pone che $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$. La potenza in $\mathbb{Q}$ gode delle stesse proprietà viste sopra. Si deve però aggiungere la seguente:

Proposizione 1.20. *Siano $a, b \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$, ed $n \in \mathbb{Z}$. Allora $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$.*

Oltre che con le frazioni, gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$ possono essere rappresentati anche mediante i numeri decimali, dei numeri cioè in cui due serie di cifre sono separate da una virgola. Ne sono esempi $12,5$ e $0,3333\ldots$. Più precisamente possiamo dare la seguente definizione. Un *numero decimale* è un'espressione del tipo $q = a_0, a_1a_2a_3\ldots$. La parte a sinistra della virgola, a_0, è chiamata *parte intera* di q ed è sempre costituita da un numero finito di cifre di cui, se sono più di una, la prima non è mai 0. La parte dopo la virgola, $a_1a_2a_3\ldots$ è detta *parte decimale* o *mantissa* di q e può essere costituita sia da un numero finito che infinito di cifre. Nella notazione anglosassone si usa il punto al posto della virgola. I numeri interi non hanno parte decimale. Per meglio dire, preso $a \in \mathbb{Z}$, si pone $a = a,0$. Ciò significa che gli interi sono numeri razionali con parte decimale nulla. I numeri razionali che non sono interi possono invece avere parte decimale limitata od illimitata. Nel primo caso si parla di numeri *decimali limitati*, nel secondo caso di *decimali illimitati*. Ne sono esempio rispettivamente $3,68$ e $2,7513131313\ldots$.

In particolare, si trova che la parte decimale di un numero razionale, se è illimitata, è necessariamente *periodica*. Ciò significa che in essa può essere sempre trovato un gruppo finito di cifre, chiamato *periodo*, che si ripete infinite volte nello stesso ordine. Ad esempio nel numero $0,333\ldots$ il numero 3 si ripete infinite volte nella parte decimale. In $2,75131313\ldots$ si ripetono le cifre 13. Per comodità di scrittura, si è soliti indicare con un soprassegno la parte periodica che va così scritta una sola volta. Ad esempio, il numero razionale $0,333\ldots$ diventa $0,\overline{3}$ ed il numero $2,75131313\ldots$ diventa in questo modo $2,75\overline{13}$. In un numero decimale illimitato periodico si possono trovare dopo la virgola ed a sinistra del periodo delle cifre che non si ripetono. Esse costituiscono l'*antiperiodo*. Il numero $0,\overline{3}$ non ha antiperiodo, invece l'antiperiodo di $2,75131313\ldots$ è 75. Se non è presente l'antiperiodo il numero decimale è detto illimitato periodico *semplice*, in caso contrario, in presenza dell'antiperiodo, è detto numero decimale illimitato periodico *misto*.

Per passare dalla rappresentazione frazionaria a quella decimale basta effettuare una *divisione in colonna* tra il numeratore ed il denominatore come ci è stato insegnato nei primi anni di scuola. Quello che si trova è che o la divisione si arresta, producendo ad un certo punto un resto nullo e si ottiene quindi un numero decimale limitato, oppure la sequenza dei resti non si ferma, ma da un certo punto in poi, si ripete periodicamente nello stesso ordine. In tal caso si ottiene un numero decimale periodico.

A noi interessa piuttosto capire come si passa dalla rappresentazione decimale di un numero razionale a quella frazionaria poiché è molto più comodo effettuare calcoli con le frazioni anziché con i numeri decimali. Riassumiamo brevemente le regole da seguire. Supponiamo di avere un numero decimale limitato q. Esso equivale ad una frazione $\frac{a}{b}$ il cui numeratore a è il numero che si ottiene prendendo tutte le cifre di q tralasciando gli eventuali 0 iniziali ed eliminando la virgola. Il denominatore b è invece uguale ad un 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre dopo la virgola. La frazione così ottenuta va poi ridotta ai minimi termini. Ad esempio, il numero $0,25$ è uguale alla frazione $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; il numero razionale $0,0074$ coincide con la frazione $\frac{74}{10000} = \frac{37}{5000}$; il numero $35,793$ è uguale alla frazione $\frac{35793}{1000}$ che non è ulteriormente semplificabile poiché il numeratore non è divisibile né per 2 né per 5. Veniamo ora ai decimali illimitati periodici semplici.

Preso ora $q \in \mathbb{Q}$, numero decimale illimitato periodico semplice, questo coincide con la frazione $\frac{a}{b}$ in cui a è il numero che si ottiene da q prendendo tutte le sue cifre, cancellando gli eventuali 0 iniziali, scrivendo una sola volta le cifre del periodo, e sottraendogli il numero costituito dalle cifre a sinistra del periodo. Il denominatore b è invece uguale a tanti 9 quante sono le cifre del periodo. Ad esempio, $0,\overline{2} = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$; $0,\overline{034} = \frac{34-0}{999} = \frac{34}{999}$; infine $87,\overline{6012} = \frac{876012-87}{9999} = \frac{875925}{9999} = \frac{97325}{1111}$.

Se infine $q \in \mathbb{Q}$ è un numero decimale illimitato periodico misto, esso è uguale alla frazione $\frac{a}{b}$ in cui il numeratore a si ottiene come nel caso precedente ed il denominatore b è uguale a tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo. Per esempio $0,1\overline{5} = \frac{15-1}{90} = \frac{14}{90} = \frac{7}{45}$; $0,00\overline{10} = \frac{10-0}{9900} = \frac{1}{990}$; $0,010\overline{49} = \frac{1049-10}{99000} = \frac{1039}{99000}$. La frazione che si ottiene seguendo questi passi, si chiama *frazione generatrice*di q. Una giustificazione molto elegante delle regole sopra illustrate che però esula dai limiti di questo manuale, richiede degli strumenti non elementari dell'Analisi Matematica: le serie numeriche. Esiste una dimostrazione più semplice che preferiamo illustrare applicandola ad un esempio. Sia dato $q = 0,84\overline{21}$. Vogliamo determinare la frazione generatrice di q. Il trucco è quello di costruire due numeri la cui differenza produce un numero intero che cancella il periodo di q. Prendiamo precisamente $10000q = 8421,\overline{21}$ e $100q = 84,\overline{21}$. Allora $10000q - 100q = 9900q = 8421-84$ ed infine $q = \frac{8421-84}{9900}$. Questa è proprio la frazione generatrice che si trova seguendo le regole precedenti. Scriviamo ora la frazione generatrice del numero periodico $0,\overline{9}$. Seguendo le regole illustrate si ottiene $\frac{9-0}{9} = 1$. Analogamente $2,03\overline{9} = \frac{2039-203}{900} = \frac{1836}{900} = 2,04$. Più in generale, si trova che la frazione generatrice di un numero decimale periodico q che ha periodo uguale a 9, restituisce in realtà il numero decimale limitato che approssima q per eccesso troncando il periodo. Quindi per convenzione si pone che $0,\overline{9} = 1$, cioè che il numero 1 ha una doppia rappresentazione come numero decimale: sia limitato (in realtà è un numero intero) che illimitato periodico. Lo stesso si fa per tutti i numeri decimali periodici con periodo uguale a 9. Se si ammette questa unica eccezione, si può formulare il seguente fondamentale risultato:

Proposizione 1.21. *Sia $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ un numero razionale. Allora esiste ed è* essenzialmente *unica la rappresentazione di q come numero decimale. In particolare,*

(i) se b contiene solo fattori uguali a 2 e 5, allora si ottiene un numero decimale limitato;

(ii) se b contiene solo numeri primi diversi da 2 e 5, allora si ottiene un numero decimale periodico semplice;

(iii) *se b contiene almeno un fattore uguale a 2 o 5 ed almeno un fattore primo diverso da 2 e 5, allora si ottiene un numero decimale periodico misto.*

È il caso di sottolineare che un numero decimale illimitato che non è periodico non è affatto un numero razionale. Si pensi ad esempio al numero $\pi = 3,1415926535\ldots$, il numero che si ottiene dividendo la lunghezza di una *qualsiasi* circonferenza per il suo diametro. In esso le cifre della mantissa non si ripetono mai periodicamente in maniera regolare. Per questo $\pi \notin \mathbb{Q}$ e si dice che π è un numero *irrazionale.* I numeri decimali illimitati *aperiodici* assieme ai razionali formano l'insieme dei numeri reali.

Numeri Reali

Risolvendo semplici problemi della Geometria, come il calcolo della diagonale di un quadrato di lato 1, si ottengono delle quantità che non sono numeri razionali. Ad esempio $\sqrt{2}$, quel numero che moltiplicato per sé stesso dà 2, non è un numero razionale (vedi Esercizio 1.15). Per contenere $\sqrt{2}$ che è un numero *irrazionale*, e moltissime altre quantità dette *trascendenti*, come π, si costruisce l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Data la complessità di questo insieme, qui non possiamo nemmeno spiegare *en passant* come costruirlo. Una presentazione rigorosa di questo insieme verrà fatta nei primi corsi universitari di Analisi Matematica. Ci basti per ora sapere che $\mathbb{R}$ è un buon insieme che permette di misurare le quantità geometriche. Inoltre in esso possono essere costruite le funzioni elementari (trigonometriche, esponenziali e logaritmiche) che nei prossimi capitoli vedremo più da vicino. Si ottiene così un'ulteriore estensione numerica: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Èil caso di dire che la costruzione degli insiemi numerici non si arresta ad $\mathbb{R}$. Si possono infatti costruire insiemi sempre più grandi di numeri che contengono $\mathbb{R}$ e gli altri insiemi numerici che abbiamo introdotto. Un esempio importante è l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* che contiene l'elemento $\sqrt{-1} = i$ ed in cui si possono trovare tutte le radici dei *polinomi* a coefficienti reali (si veda il capitolo secondo). Anche questo insieme verrà studiato rigorosamente nei corsi di Analisi.

Dato un numero reale positivo a ed un intero positivo n, si definisce *radice n-sima* di a quella quantità che elevata all'n-sima potenza dà a. Essa viene indicata col simbolo $\sqrt[n]{a}$. Diremo che a è il *radicando* e che n è l'*indice* della radice. Valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 1.22. *Siano dati i numeri reali $a, b \geqslant 0$ ed n, m numeri naturali non nulli. Allora*

(i) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$

(iii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

(iv) $0 \leqslant a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$

Èopportuno sottolineare che in generale $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Ad esempio $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

Può tornare utile ricordare la *formula del radicale doppio.*

Proposizione 1.23. *Siano* $a, b \in \mathbb{N}$. *Supponiamo che* $a^2 - b$ *sia un* quadrato perfetto*, ovvero si abbia* $\sqrt{a^2 - b} \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \tag{1.1}$$

Esempio 1.24. Vogliamo semplificare $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Siccome $2^2 - 3 = 1$ è un quadrato perfetto, possiamo applicare la formula (1.1). Si ha: $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$. Semplifichiamo ora il radicale $\sqrt{16 + 2\sqrt{15}}$. Prima di applicare la formula 1.1, dobbiamo scriverlo in forma canonica portando il 2 dentro la radice interiore: $\sqrt{16 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{16 + \sqrt{60}}$. Siccome $16^2 - 60 = 196 = 14^2$ possiamo applicare la formula 1.1. Si ha: $\sqrt{16 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{16+14}{2}} + \sqrt{\frac{16-14}{2}} = \sqrt{15} + 1$.

Quando nel denominatore di una frazione compare una radice, si è soliti *razionalizzare* questa frazione per portare la radice al numeratore. Presentiamo qui i casi più comuni. Se compare il radicale $\sqrt[n]{a}$, si moltiplicano sia numeratore che denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-1}}$. Ad esempio: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$. Il secondo caso che ci interessa è quello in cui al denominatore compare un binomio in cui uno almeno è una radice quadrata. Si voglia ad esempio razionalizzare $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Il trucco è di sfruttare le formule della *differenza di quadrati*. Ad esempio: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1$. Razionalizziamo ora il numero $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. Come spiegato prima, si ottiene $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{7(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = -\frac{7(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$. In $\mathbb{R}$ è possibile definire le potenze con esponente razionale. In particolare, preso $a \in \mathbb{R}$ positivo, n ed m senza fattori comuni, si pone $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ed $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Èfondamentale sottolineare che quando si lavora con esponenti frazionari la base deve essere positiva e che la frazione nell'esponente deve essere ridotta ai minimi termini. Se non si è cauti si potrebbe avere che

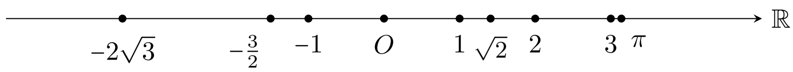
$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

L'errore sta nel fatto che $(-1)^{\frac{2}{6}}$ non è definito in $\mathbb{R}$ poiché la base è negativa e l'esponente è una frazione non ridotta.

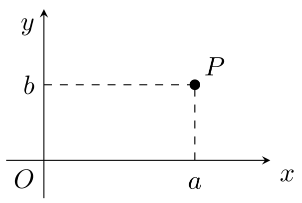
Èbene ricordare che in $\mathbb{R}$ con il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si indica un ben preciso numero positivo univocamente determinato. Le scritture (che purtroppo sono molto diffuse) come $\sqrt{4} = \pm 2$ sono assolutamente prive di significato e se ne deve abbandonare l'uso improprio. Diverso e più corretto è dire che l'equazione $x^2 - 4$ ha due soluzioni date da $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, dove per comodità si è scritto con un unico simbolo entrambe le soluzioni. Tuttavia $\sqrt{4} = 2$.

Abbiamo accennato sopra che i numeri reali, come i numeri razionali, ammettono una rappresentazione decimale. Inoltre risulta che i numeri reali possono avere una qualsiasi rappresentazione decimale: limitata, illimitata periodica o illimitata aperiodica. Nell'ultimo caso si ottengono tutti e soli i numeri irrazionali come ad esempio $\sqrt{2}$ e π. Un modo equivalente di definire l'insieme dei numeri reali è appunto quello di considerare l'insieme di tutti i possibili numeri decimali. Si faccia bene attenzione a non dire *mai* che '$\sqrt{2}$ vale $1,41$' né che '$\pi = 3,14$'. Questo è (formalmente) inaccettabile poiché $\sqrt{2}$ e π sono numeri irrazionali, *non* possono pertanto essere uguali ad un numero decimale limitato. Èmeglio dire '$\sqrt{2}$ vale *con buona approssimazione* $1,41$' e similmente 'π vale *circa* $3,14$'.

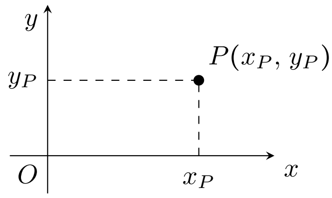
In $\mathbb{R}$, come negli insiemi numerici visti in precedenza, si definiscono il valore assoluto ed il confronto tra numeri. Questi godono delle medesime proprietà viste sopra. In particolare l'*ordinamento naturale* definito su $\mathbb{R}$ permette di identificare l'insieme dei numeri reali con una retta del piano. Consideriamo una *retta orientata*, cioè una retta su cui si è fissato un verso di percorrenza. Canonicamente lavoreremo con una retta orizzontale con il verso che va da sinistra a destra. Preso un punto O su di essa, chiameremo questo *origine* e lo identificheremo con lo 0 dei numeri reali. Fissiamo un segmento di lunghezza unitaria u. Il punto che dista u da O sarà identificato con il numero reale 1. Sfruttando segmenti di lunghezza proporzionale, possiamo ora inserire tutti i numeri reali sulla retta orientata. A destra dell'origine vanno i numeri positivi, a sinistra quelli negativi. Si ottiene:



La fondamentale corrispondenza biunivoca che esiste tra numeri reali e punti della retta orientata, si riassume dicendo che $\mathbb{R}$ è un *insieme continuo*. Anche l'insieme $\mathbb{R}^2$ ha una importante interpretazione geometrica. Similmente a quanto fatto per $\mathbb{R}$, gli elementi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ possono essere identificati con i punti del piano. Come abbiamo visto in generale per il prodotto cartesiano tra due insiemi qualsiasi, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ graficamente può essere ottenuto considerando due rette perpendicolari orientate corrispondenti ad $\mathbb{R}$. Per comodità si fanno coincidere le origini delle rette orientate con il loro punto di intersezione. Tale punto si chiama *origine* del piano. L'asse orizzontale, orientato da sinistra a destra, è chiamato l'asse x delle *ascisse*, l'asse verticale, orientato dal basso verso l'alto, è detto l'asse y delle *ordinate*. L'insieme di x, y ed O si chiama *sistema di riferimento cartesiano*. Il piano su cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano è detto *piano cartesiano*. Data una coppia di numeri reali (a,b), per determinare il punto P corrispondente nel piano cartesiano, si individuano sulle rette orientate x ed y i numeri a e b rispettivamente. Ora si tracciano la retta parallela ad y passante per a e quella parallela ad x passante per b. La loro intersezione è il punto cercato. Dunque ad ogni coppia ordinata di numeri reali corrisponde un ben preciso punto del *piano cartesiano*.



Vale anche il viceversa: ad ogni punto del piano si può far corrispondere una coppia ordinata di numeri reali. Per vedere ciò, si fissino nel piano due rette ortogonali orientate x ed y incidenti in un punto O. Dato un punto P nel piano, si traccia la retta parallela all'asse y passante per P. Il punto di intersezione di tale retta con l'asse x determina un numero reale x_P, l'ascissa del punto P. Simmetricamente si costruisce l'ordinata y_P del punto P. In questo modo al punto P si è associata la coppia di numeri reali (x_P, y_P). Per convenzione si scrive $P(x_P, y_P)$ oppure $P = (x_P, y_P)$. Graficamente la situazione illustrata è:



Questa identificazione tra un punto del piano ed una coppia di numeri reali, che è dovuta al grande matematico francese del Seicento Renée Descartes, è alla base della Geometria analitica che studieremo nel terzo capitolo.

Negli esami di Analisi Matematica è importante conoscere ed avere dimestichezza con una classe particolare di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, gli *intervalli*. Siano $a < b$ due numeri reali. Chiameremo *intervalli limitati* di estremi a e b gli insiemi del tipo:

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$
$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}$$
$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \}$$
$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \}$$

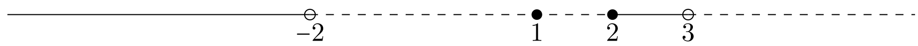
In particolare il primo è detto *aperto*, il secondo *chiuso*, il terzo *chiuso a sinistra e aperto a destra*, l'ultimo *chiuso a destra ed aperto a sinistra*. Graficamente questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono rappresentati da segmenti di estremi a e b. Gli estremi vanno inclusi o meno a seconda dei casi. Sia ora $c \in \mathbb{R}$. Si dicono intervalli *illimitati* gli insiemi

$$(c, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > c \}$$
$$[c, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant c \}$$
$$(-\infty, c) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < c \}$$
$$(-\infty, c] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant c \}$$

In particolare il primo è detto *aperto illimitato superiormente*, il secondo *chiuso illimitato superiormente*, il terzo *aperto illimitato inferiormente*, l'ultimo *chiuso illimitato inferiormente*. Graficamente questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono rappresentati da semirette di origine c: l'estremo va incluso o meno a seconda dei casi.

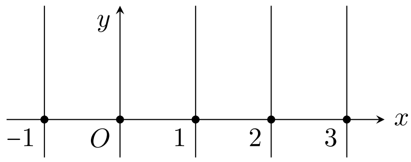
Esercizio 1.3. Cosa rappresenta geometricamente l'insieme $X = (-\infty, -2) \cup \{ 1 \} \cup [2, 3)$?

Svolgimento. L'insieme X è unione di una semiretta privata della sua origine, di un punto e di un segmento compreso il suo estremo inferiore ed escluso quello superiore.



Esercizio 1.4. Rappresentare graficamente l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ nel piano cartesiano.

Svolgimento. L'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ è l'unione delle rette parallele all'asse y passanti per i nodi interi dell'asse x.



Merita una trattazione a parte la *legge di annullamento del prodotto*. Formuliamo per generalità questo importantissimo principio sui numeri reali. Si badi però che è vero in ciascuno degli insiemi numerici studiati.

Proposizione 1.25 (Legge di annullamento del prodotto)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $ab = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$.*

Questo principio asserisce dunque che l'unico modo che abbiamo per poter annullare un prodotto di diversi fattori è che almeno uno dei fattori sia nullo. Si può anche dire che se si moltiplicano tra loro dei numeri reali che sono diversi da zero, anche il loro prodotto è diverso da zero. I metodi risolutivi delle equazioni algebriche che studieremo nel secondo capitolo sfruttano questo fatto. Si consideri ad esempio il predicato $p(x) : (x-1)(x+2) = 0$ e ci chiediamo per quali valori reali della x tale predicato sia verificato. Dalla legge di annullamento del prodotto, almeno uno dei fattori $x-1$ oppure $x+2$ deve essere uguale a zero. Ne segue che il predicato $p(x)$ equivale al predicato $q(x) : x-1 = 0 \lor x+2 = 0$. Questo più semplicemente è verificato per $x = 1$ oppure $x = -2$.

1.5 Il Principio di Induzione

Quando si vuole dimostrare che una proprietà $p(n)$ è vera per i numeri naturali a partire da un certo numero n_0, è utilissimo a volte utilizzare una specifica tecnica dimostrativa, il *principio di induzione*. Già noto nell'Antica Grecia, si tratta di uno degli assiomi di cui il matematico torinese Giuseppe Peano si servì all'inizio del Ventesimo secolo per costruire in maniera formale l'Aritmetica.

Esso consta di due passi: la *base dell'induzione* ed il *passo induttivo*. Formalmente si scrive:

Assioma 1.26 (Principio di Induzione)**.** Sia n_0 un numero naturale. Sia $p(n)$ un predicato che dipende dalla sola variabile $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

(i) $p(n_0)$ è vera (base dell'induzione)

(ii) preso un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, risulta che se $p(n)$ è vera, allora è anche vera $p(n+1)$ (passo induttivo).

Allora $p(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geqslant n_0$.

Facciamo qualche esempio dettagliato.

Esempio 1.27. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, si ha $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nel nostro caso $n_0 = 1$ ed il predicato da dimostrare è l'uguaglianza $p(n): \ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Cominciamo con la base dell'induzione. Dobbiamo verificare che il predicato è vero per $n = n_0 = 1$. Si ha infatti che $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Quindi $p(1)$ è vero. Studiamo ora il passo induttivo. Dobbiamo supporre che per un certo $n > 1$ il predicato $p(n)$ sia vero (la cosiddetta *ipotesi induttiva*) e dobbiamo dedurre da questo che è vero anche $p(n+1)$, cioè che il predicato è vero anche per il successivo di n. Esplicitando si ha che dobbiamo provare $p(n+1): \ 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ora $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$ per la proprietà associativa dell'addizione. La prima quantità tra parentesi per l'ipotesi induttiva, vale $\frac{n(n+1)}{2}$. Quindi la somma da cui siamo partiti è $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Allora il passo induttivo è soddisfatto, e quindi, grazie al principio di induzione, si ha che $p(n)$ è vera per ogni $n \geqslant 1$ proprio come volevamo dimostrare.

Gauss, grande scienziato dell'Ottocento, trovò questo risultato all'età di soli dieci anni. Egli oggi è considerato il *Princeps mathematicorum*.

Esempio 1.28. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$.

In questo caso l'induzione parte da $n_0 = 0$. Il predicato da verificare è $p(n)$: $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$. Èfacile convincersi che $p(0) : 1 = 1^2$ è vero. Vediamo ora il passo induttivo. Sia $n > 0$ e supponiamo che $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$. Dobbiamo allora provare che anche $p(n+1) : 1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2(n+1)+1) = (n+2)^2$ è verificato. Sfruttando l'ipotesi induttiva ed isolando l'ultimo addendo, abbiamo che $[1+3+5+\cdots+(2n+1)] + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Il passo induttivo è dunque soddisfatto. Per principio di induzione, si ha che $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, come volevasi dimostrare.

1.6 Gli assiomi di Peano e l'Aritmetica

A conclusione di questo capitolo vogliamo fare un esempio di come sia una teoria matematica e la sua assiomatizzazione. Faremo vedere come, a partire da concetti primitivi ed assiomi molto elementari, è possibile costruire una teoria formale. In particolare, costruiremo le solide fondamenta dell'Aritmetica, ricordando che essa è la teoria dei numeri naturali. Pertanto occorre definire in maniera assiomatica l'insieme dei numeri naturali. Ci ispireremo alle idee di Peano, cercando di mantenere il discorso ad un livello non troppo formale per quelli che sono i nostri scopi, ma comunque rigoroso. Osserviamo che questa assiomatizzazione è molto recente (circa un secolo fa), se la confrontiamo con quella della Geometria piana di Euclide che risale al III secolo avanti Cristo.

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali: tre concetti primitivi che daremo per buoni sottintendendo che siano comprensibili a tutti:

(C1) Numero naturale

(C2) Zero

(C3) Successivo di un numero naturale

Parafrasiamo questi tre concetti primitivi. In breve, stiamo dicendo che vogliamo costruire i numeri che ci servono per contare (C1). Abbiamo però bisogno di un punto di partenza (C2) e della possibilità di passare da un numero all'altro nell'atto del contare (C3).

Ora, di questi tre concetti primitivi, dobbiamo elencare delle proprietà evidenti che non hanno bisogno di essere spiegate né provate, gli assiomi:

(A1) Zero è un numero naturale

(A2) Ogni numero naturale ha un successivo che è un numero naturale

(A3) Zero non è il successivo di alcun numero naturale

(A4) Numeri naturali distinti hanno successivi distinti

(A5) Principio di induzione

Ora abbiamo tutto ciò che ci serve. Indicheremo l'insieme che stiamo per costruire con $\mathbb{N}$. Per (A1), *zero* è un numero naturale. Decidiamo di indicare questo numero col simbolo 0. Sicché $\mathbb{N} = \{ 0 \}$. Non abbiamo finito! Per (A2), anche il successivo di 0, chiamiamolo $s(0)$, è un elemento di $\mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} = \{ 0, s(0) \}$. Non può capitare che $0 = s(0)$, perché per (A3) 0 non è il successivo di alcun numero naturale. Allora abbiamo bisogno di un nuovo simbolo per indicare $s(0)$. Decidiamo di usare il simbolo $1 = s(0)$. Quindi $\mathbb{N} = \{ 0, 1 \}$. Il processo non è ancora terminato. Infatti anche il successivo di 1, $s(1)$, è un numero naturale per (A2). Quindi $s(1) \in \mathbb{N}$, ma per (A3) non può valere $0 = s(1)$. Se poi fosse $1 = s(1)$, avremmo $s(0) = s(1)$, il che viola l'assioma (A4), perché i numeri distinti 0 ed 1 non possono avere lo stesso successivo. Ci serve quindi un nuovo simbolo per indicare $s(1)$, per convenzione poniamo $2 = s(1)$. Riassumendo quanto fatto finora, abbiamo $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2 \}$. Èfacile convincersi che questo processo non si arresta mai e che produce un insieme infinito. L'insieme che si ottiene è proprio l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$. Èdoveroso sottolineare che per costruire $\mathbb{N}$ non abbiamo usato l'assioma (A5). Esso va aggiunto perché serve a dimostrare le proprietà di cui godono i numeri naturali, ma non è strettamente necessario per costruire $\mathbb{N}$ in maniera *naif* come abbiamo fatto noi. A partire dalla costruzione appena vista di $\mathbb{N}$ si possono poi costruire i numeri interi, quelli razionali e così via, sempre in maniera rigorosa, servendosi di eventuali nuovi concetti primitivi ed assiomi. In maniera analoga, a partire dai punti e dalle rette del piano e dagli assiomi di Euclide si costruiscono le fondamenta della Geometria razionale.

1.7 Esercizi risolti

Esercizio 1.5. Si indichino con c i cani, con u gli uomini e con $p(c, u)$ il predicato 'c è amico di u'. Usando il linguaggio simbolico, riscrivere le frasi p_1 ='Ogni cane è amico di qualche uomo' e p_2 ='C'è solo un cane amico di tutti gli uomini'.

Usando il linguaggio comune, riscrivere gli enunciati $q_1 = \exists\ c\ \exists!\ u : p(c,u)$; $q_2 = \exists\ c\ \exists\ u : p(c,u)$; $q_3 = \forall\ c\ \forall\ u : p(c,u)$.

Svolgimento. Le prime due frasi diventano $p_1 : \forall\ c\ \exists\ u : p(c,u)$ e $p_2 : \exists!\ c\ \forall\ u : p(c,u)$. Le altre tre proposizioni diventano q_1 ='C'è un cane che è amico di un uomo soltanto', q_2 ='C'è un cane che è amico di un uomo' e q_3 ='Tutti i cani sono amici di tutti gli uomini'.

Esercizio 1.6. Spiegare perché è falsa la seguente affermazione: 'Se n è un numero negativo, allora anche $n+3$ è negativo.'

Svolgimento. Questo enunciato può essere riformulato come un predicato nella variabile n. Ad esempio $p(n) : \forall$ numero negativo n anche il numero $n+3$ è negativo. Così riformulato è più facile negarlo e mostrare quindi che è falso. Per quanto abbiamo imparato sopra, per negare il $\forall$ dobbiamo esibire almeno un numero n che è negativo, ma tale che $n+3$ è positivo. Ad esempio $n = -2$ fa al caso nostro poiché $n+3 = 1$ che è un numero positivo.

Esercizio 1.7. Usando il linguaggio matematico, riscrivere la seguente proposizione: 'Non c'è un luogo in cui piove ogni giorno'.

Svolgimento. Indichiamo con g i giorni, con l i luoghi e con $p(g,l)$ il predicato 'Nel giorno g piove nel luogo l'. Allora la frase della traccia diventa: $\overline{\exists\ l\ \forall\ g : p(g,l)}$. Ricordando come si negano i quantificatori più semplicemente otteniamo la formulazione $\forall\ l\ \exists\ g : \overline{p(g,l)}$ che si legge 'In ogni luogo c'è un giorno in cui non piove'.

Esercizio 1.8. Dimostrare la seguente proposizione 'Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, allora n non è multiplo di 10'. Formulare l'implicazione contronominale, inversa e contraria. Stabilire se è vera l'implicazione inversa.

Svolgimento. Per comodità conviene provare la contronominale che dice 'Se n è multiplo di 10, allora n è pari'. Ciò è vero poiché se $n = 10m$, per qualche intero m, allora vale anche $n = 2(5m)$ che è un numero pari. La proposizione inversa è 'Se n non è multiplo di 10, allora n è dispari'(che è falsa). La contraria è 'Se n è pari, allora n è multiplo di 10'(falsa anche questa).

Esercizio 1.9. Siano p: 'ABC è un triangolo rettangolo' e q: 'ABC è un triangolo scaleno'. Scrivere il contenuto delle espressioni $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \wedge \overline{q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{\overline{q}}$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \overline{q}$.

Svolgimento. Nell'ordine si ottengono le proposizioni: $\overline{p}$:'Il triangolo ABC non è rettangolo'; $p \wedge q$:'Il triangolo ABC è rettangolo e scaleno'; $p \vee q$:'Il triangolo ABC è rettangolo o scaleno'; $p \wedge \overline{q}$:'Il triangolo ABC è rettangolo e non è scaleno'; $\overline{p} \vee \overline{q}$:'Il triangolo ABC o non è rettangolo o non è scaleno'; $\overline{\overline{q}}$:'Non è che il triangolo ABC

non è scaleno'; $p \Rightarrow q$:'Se il triangolo ABC è rettangolo, allora è scaleno'; $q \Rightarrow \overline{q}$:'Se il triangolo ABC è scaleno, allora non è scaleno'.

Esercizio 1.10. Siano date p e q proposizioni. Costruire le tabelle di verità di $\overline{p} \vee q$; $(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$; $q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$.

Svolgimento. Si ottiene

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$	$q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

Esercizio 1.11. Siano $A = \{a, 1, 2, 3, b, 4\}$, $B = \{a, c, 1, 2\}$ e $C = \{b, 3, d, 5\}$. Calcolare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $B \cap C$, $(A \cap C) \cup B$, $B \setminus C$ e $C \setminus A$.

Svolgimento. Si ha che $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$, $A \cap B = \{a, 1, 2\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a, 1, 2\}$, $B \cap C = \varnothing$, $(A \cap C) \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$, $B \setminus C = B$ ed infine $C \setminus A = \{d, 5\}$.

Esercizio 1.12. Siano dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{\varnothing, x\}$. Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$.

Svolgimento. Si ha che $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ e $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{x\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing, x\}\}$.

Esercizio 1.13. Siano dati gli insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{0, 1\}$. Calcolare $A \times B$ e $B \times A$. Sono uguali questi due insiemi?

Svolgimento. Si ha che il primo insieme $A \times B = \{(a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1)\}$ e che $B \times A = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$. I due insiemi sono diversi poiché ad esempio la coppia $(a, 1)$ è un elemento del primo insieme ma non del secondo.

Esercizio 1.14. Sistemare in ordine crescente i numeri $-\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\frac{1}{2}$, e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Svolgimento. Per prima cosa sappiamo che i numeri negativi sono più piccoli di tutti i numeri positivi. Quindi si tratta di mettere in ordine separatamente $-\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$ e $-\frac{1}{2}$ da un lato e $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dall'altro. Il metodo è semplice: si suppone che valga una diseguaglianza e per mezzo di equivalenze logiche consecutive si deve ottenere una diseguaglianza più semplice. Se l'ultima è vera, si è partiti da una diseguaglianza vera. Se invece l'ultima è falsa, la diseguaglianza di partenza non è vera ed è quindi giusta la diseguaglianza opposta. Partiamo dall'ipotesi che $-\frac{\sqrt[3]{2}}{5} < -\frac{1}{2}$. Cambiando il segno, cambia il verso: $\frac{\sqrt[3]{2}}{5} > \frac{1}{2}$. Moltiplicando tutto per 10 si ottiene $2\sqrt[3]{2} > 5$. Elevando tutto alla terza potenza si ottiene $2^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 > 5^3$ ovvero che $16 > 125$ che è falso. Allora vale l'altra diseguaglianza: $-\frac{\sqrt[3]{2}}{5} > -\frac{1}{2}$. Confrontiamo ora i due numeri positivi. Supponiamo che $\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Allora, per poter eliminare le radici, dobbiamo elevare alla seconda potenza entrambi i membri. Si ha che $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Cioè, cancellando i denominatori, $8 < 9$. Siccome questa condizione è vera, anche quella da cui siamo partiti è vera. Mettendo tutto insieme abbiamo che l'ordine di quei quattro numeri reali è $-\frac{1}{2} < -\frac{\sqrt[3]{2}}{5} < \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 1.15 (Pitagora)**.** Dimostrare che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè che non può essere scritto come frazione.

Svolgimento. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con m ed n numeri interi positivi. Possiamo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini, altrimenti possiamo cancellare i fattori comuni dal denominatore e dal numeratore. Sicché $2 = \frac{m^2}{n^2}$, ovvero $2n^2 = m^2$. Siccome la quantità a sinistra dell'uguale è un numero pari, anche quello a destra deve esserlo. Quindi m^2 è un numero pari. Nelle lezioni abbiamo dimostrato che anche m è un numero pari (vedi Teorema 1.10). Quindi $m = 2h$, per qualche intero positivo h. Sostituendo sopra abbiamo $2n^2 = 4h^2$. Semplificando il 2, si ottiene $n^2 = 2h^2$. Poiché $2h^2$ è un numero pari, anche n^2 è pari e, per quanto ricordato prima, anche n è un numero pari. Allora m ed n contengono entrambi il fattore 2 perché sono entrambi pari. Ma questo contraddice la nostra ipotesi che la frazione $\frac{m}{n}$ fosse ridotta ai minimi termini. L'assurdo è nato dall'aver supposto $\sqrt{2}$ razionale, quindi $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

Esercizio 1.16. Risolvere la seguente espressione aritmetica:

$$\frac{\left|\sqrt{2^3-2^2}-(2+\sqrt{3})\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5:\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^2-\frac{1-\frac{3}{7}}{3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}}+1}.$$

Svolgimento.

$$\frac{\left|\sqrt{2^3-2^2}-(2+\sqrt{3})\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5:\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^2-\frac{1-\frac{3}{7}}{3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}}+1}=\frac{\left|\sqrt{8-4}-2-\sqrt{3}\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5:\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^2-\frac{\frac{7-3}{7}}{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)}+1}=\frac{\left|\sqrt{4}-2-\sqrt{3}\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5:\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^2-\frac{\frac{4}{7}}{\frac{9}{7}}+1}=$$

$$=\frac{\left|\cancel{2}-\cancel{2}-\sqrt{3}\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5-4}\right]^2-\frac{4}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{9}+1}=\frac{\left|-\sqrt{3}\right|\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+1}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+1}=\frac{3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}{1}=3^{\frac{7}{6}}=3\sqrt[6]{3}.$$

Esercizio 1.17. A partire dalle leggi di De Morgan per la logica, dedurre le leggi di De Morgan per l'insiemistica.

Svolgimento. Siano dati gli insiemi A e B. Vogliamo provare che $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. Consideriamo i predicati $p(x): x\in A$ e $q(x): x\in B$. Allora $p(x)$ è verificato da tutti e soli gli elementi di A, $q(x)$ da tutti e soli quelli di B. Prendiamo un elemento $x\in\overline{A\cup B}$. Questo equivale a dire che è vera la proposizione $\overline{p(x)\vee q(x)}$. Per la seconda legge di De Morgan della logica, a sua volta questa proposizione è equivalente a $\overline{p(x)}\wedge\overline{q(x)}$. Infine, quest'ultima proposizione è equivalente a dire che $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Segue l'uguaglianza voluta dei due insiemi. La prima legge di De Morgan si mostra allo stesso modo.

1.8 Esercizi proposti

Esercizio 1.18. Siano date p e q proposizioni. Dimostrare che vale la seguente equivalenza: $\overline{\overline{p} \wedge q} \vee p \Leftrightarrow \overline{q} \vee p$.

Esercizio 1.19. Siano date p e q proposizioni. Dimostrare che le seguenti implicazioni sono tautologie: $p \Rightarrow (p \vee q)$ e $(p \wedge q) \Rightarrow p$. Esse sono dette rispettivamente il *passaggio all'alternativa* ed il *principio di scelta*. Si faccia un esempio per entrambe. Dedurne che anche $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ è una tautologia.

Esercizio 1.20. Determinare l'insieme delle parti dell'insieme $A = \{ a, b, \{ c, d \} \}$.

Esercizio 1.21. Confrontare le seguenti coppie di numeri:

(i) $\sqrt{3};\ \frac{8}{5}$

(ii) $-\frac{1}{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \sqrt{2}-1$

Esercizio 1.22. Stabilire se sono vere le seguenti diseguaglianze:

(i) $1 < \sqrt{3} < \frac{3}{2}$

(ii) $-1 < \frac{\sqrt{2}}{3} < -\sqrt{2}+2$

Esercizio 1.23. Risolvere le seguenti espressioni aritmetiche:

(i) $1 + \frac{|-2|}{-1+\frac{4}{1+\frac{3}{2}}}$

(ii) $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$

(iii) $\left[\left(3-\left|-\frac{1}{5}\right|+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{11}\right]:\left(-1-\left|\frac{1}{2}\right|\right)$

(iv) $\frac{\{[2+0,\overline{4}]\cdot\frac{3}{11}+0,\overline{5}\}\cdot 0,\overline{27}-0,0\overline{1}}{0,4-0,3\overline{5}+0,\overline{5}:0,1\overline{3}-0,\overline{3}:0,2}$

(v) $\frac{(2^3:2^2)^4:(2+3^3:3^2)}{(2^2)^2\cdot\frac{3}{5}:[3^5:(3^2)^2]}$

Esercizio 1.24. Usando la formula dei radicali doppi, verificare che si ha $\sqrt{4+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+1)$ e $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6}+1$.

Esercizio 1.25. Razionalizzare le seguenti frazioni: $\frac{6}{7\sqrt{3}}$, $\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}$, $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ e $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

Esercizio 1.26. Usando il principio di induzione, dimostrare che

(i) $0+2+4+\cdots+2n = n(n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall\, n \geqslant 1$

(iii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall\, n \geqslant 1$

(iv) $n^2 > 2n + 1, \quad \forall\, n \geqslant 3$

(v) $2^n > n^2, \quad \forall\, n \geqslant 5$

Esercizio 1.27. Siano dati gli insiemi $A = \{\, x, y, 1 \,\}$, $B = \{\, x, 1 \,\}$ e $C = \{\, 1, y \,\}$. Calcolare gli insiemi $(A \times B) \cap (A \times C)$ e $A \times (B \cap C)$. Verificare che sono uguali.

Esercizio 1.28. Per ciascuna delle seguenti coppie di insiemi A e B trovare, se possibile, un insieme C che è disgiunto da B ma non da A:

(i) $A = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ e $B = \{\, 1 \,\}$

(ii) $A = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ e $B = \{\, 1, 4 \,\}$

(iii) $A = \{\, 1, 2 \,\}$ e $B = \{\, 1, 2, 5 \,\}$

Esercizio 1.29. Eseguire la divisione con resto di 19 per 5; di -19 per -5; di -19 per 5 e di 19 per -5.

Esercizio 1.30. Rappresentare graficamente i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

(i) $\left\{ -2,\ 3,\ \frac{1}{4},\ \sqrt{3} \right\}$

(ii) $[-3,\ 7)$

(iii) $(-\infty,\ 2) \cap (-3,\ 2] \cap (-4,\ 2]$

(iv) $\{-5\} \cup \left(-2,\ \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{7}{5},\ +\infty\right)$

(v) $\overline{\left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right] \cup (0,\ 1) \cup [1,\ 8)}$

(vi) $(\varnothing \cup \mathbb{R}) \smallsetminus [0,\ 1]$

Esercizio 1.31. Determinare e rappresentare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

(i) $[-1,\ 2) \times \left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$

(ii) $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right] \times \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right]$

(iii) $\{-3\} \times [1,\ 2)$

(iv) $(-\infty,\ 2] \times [-1,\ +\infty)$

(v) $(\mathbb{R} \times [-1,\ 6)) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

(vi) $((-1,\ 2) \cup \{3\}) \times (-\infty,\ 2]$

1.9 Quesiti

Esercizio 1.32. Dire a quale delle seguenti proposizioni è equivalente: 'Non tutte le mele sono dolci'

(a) Qualche mela è dolce.

(b) Tutte le mele non sono dolci.

(c) Almeno una mela non è dolce.

(d) Nessuna mela è dolce.

(e) Qualsiasi mela è dolce.

Esercizio 1.33. A quale delle seguenti è equivalente la negazione della frase 'In ogni città c'è solo una curva pericolosa'?

(a) Tutte le curve di Roma sono pericolose.

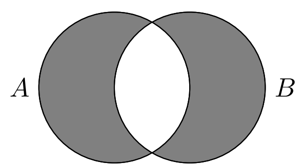
(b) C'è una città in cui nessuna o tutte le curve sono pericolose.

(c) Non esiste una città con una curva pericolosa.

(d) A Parigi non ci sono curve pericolose.

(e) In ogni città tutte le curve sono pericolose.

Esercizio 1.34. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(a) $A \cap B$;

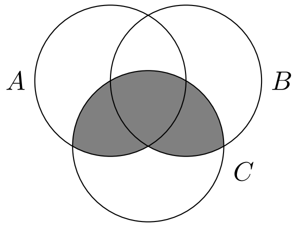
(b) $(A \setminus B) \cup B$;

(c) $A \cup B$;

(d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(e) $(A \cap B) \setminus A$.

Esercizio 1.35. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(a) $A \cap B \cap C$;

(b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

(c) $(A \cup B) \setminus C$;

(d) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esercizio 1.36. Sia dato l'insieme $A = \{ x, y, z \}$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) $\varnothing \subset \{ x \}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) $\varnothing \in A$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

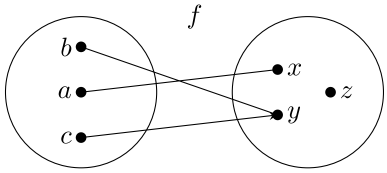
(d) $A \cup A = \{ 2x, 2y, 2z \}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) $A = \{ x \} \cup \{ y \} \cup \varnothing \cup \{ z \}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(f) $y \in \mathcal{P}(A)$ ed $y \in A$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(g) $A = \{ x, y \} \cup \{ y, z \} \cup \{ z, x \}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 1.37. Sia data la funzione f con la seguente rappresentazione sagittale:



Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) $f(b) = f(c)$ oppure f è suriettiva $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) $\{ x, z \} \subseteq Im(f)$ ed $Im(f) \supseteq \varnothing$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) f è iniettiva ma non biettiva $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) $(b, y) \in f$ oppure $f(y) = b$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) $\mathcal{G}_f = \{ (b, y), (c, y), (a, x) \}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

1.10 Esercizi di riepilogo

Risolvere i seguenti esercizi nello spazio sottostante.

Esercizio 1.38. Siano A e B insiemi con $B = \{ a, b, c, d \}$. Sia data la funzione $f : A \to B$ tale che $\mathcal{G}_f = \{ (3, b), (1, a), (4, d), (2, a) \}$. Trovare esplicitamente il dominio A di f. Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva. Determinare $Im(f)$. Dare sia la rappresentazione cartesiana che sagittale di f.

Soluzione.

Esercizio 1.39.

(i) Dimostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Usando il Lemma di divisione euclidea dimostrare che ogni numero intero dispari è della forma $4k + 1$ o $4k + 3$, con $k \in \mathbb{Z}$. Vale anche il viceversa?

(iii) Siano dai gli insiemi $A = \{ a, b, c, d \}$ e $B = \{ a, d, e \}$. Calcolare $(A \cup B) \setminus B$, $(A \cap B) \setminus B$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \setminus (A \cup B)$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Soluzione.

1.11 Risultati

Soluzione degli esercizi proposti

1.18 In maniera semplice questa equivalenza può essere provata usando le tavole di verità. Più elegantemente, ragioniamo come segue usando le proprietà dimostrate. Partiamo da $\overline{\overline{p} \wedge q}$. Per la prima legge di De Morgan essa diventa $\overline{\overline{p}} \vee \overline{q} \Leftrightarrow p \vee \overline{q}$, cancellando poi la doppia negazione. Sicché la proposizione di partenza diventa $(p \vee \overline{q}) \vee p$. Infine sfruttando nell'ordine le proprietà commutativa, associativa e la legge di idempotenza si ha il risultato finale: $(p \vee \overline{q}) \vee p \Leftrightarrow (\overline{q} \vee p) \vee p \Leftrightarrow \overline{q} \vee (p \vee p) \Leftrightarrow \overline{q} \vee p$.

1.19 Dalle seguenti tabelle si vede che sono implicazioni sempre vere:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Come esempio del passaggio all'alternativa si pensi a 'Se un numero è minore di 5, allora è anche minore o uguale a 5'. Per il principio di scelta si ha ad esempio 'Se ABC è un triangolo sia rettangolo che isoscele, allora è in particolare un triangolo isoscele'. L'ultima implicazione segue dalla proprietà transitiva dell'implicazione.

1.20 I sottoinsiemi di A sono: $\varnothing$, $\{ a \}$,$\{ b \}$, $\{ \{ c, d \} \}$, $\{ a, b \}$, $\{ a, \{ c, d \} \}$, $\{ b, \{ c, d \} \}$, $\{ a, b, \{ c, d \} \}$

1.21 Si ha che $\sqrt{3} > \frac{8}{5}$, $-\frac{1}{3} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{2} - 1$

1.22 La prima è falsa poiché $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$, la seconda è vera.

1.23 I risultati rispettivamente sono $\frac{13}{3}$, $\frac{983}{120}$, -1, $\frac{29}{229}$ e 1.

1.25 Si ottengono le quantità $\frac{2\sqrt{3}}{7}$, $\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$, $9 + 4\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$.

1.27 Sono entrambi uguali all'insieme $\{ (x, 1), (y, 1), (1, 1) \}$.

1.28 Nei primi due casi ad esempio si possono considerare i seguenti insiemi: $C_{(i)} = \{ 3 \}$ e $C_{(ii)} = \{ 2 \}$. Nel terzo caso è impossibile perché A è sottoinsieme di B, quindi tutto ciò che interseca A, interseca anche B.

1.29 Si ottiene che $19 = 5 \cdot 3 + 4$; $-19 = -5 \cdot 4 + 1$; $-19 = 5 \cdot (-4) + 1$ e $19 = -5 \cdot (-3)4 + 4$.

1.30

(i) Un insieme di quattro punti (da scrivere in ordine crescente);

(ii) Un segmento;

(iii) Si ottiene l'unione di una semiretta e di due segmenti contigui: $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, -2)$;

(iv) Si ottiene un punto ed una semiretta: $\{ -5 \} \cup (2, +\infty)$

(v) Un segmento ed una semiretta: $(-\sqrt{2}, 0] \cup [8, +\infty)$

(vi) Unione di due semirette: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

1.31 Si ottengono

(i) un rettangolo;

(ii) un segmento orizzontale;

(iii) un segmento verticale;

(iv) un angolo retto del piano;

(v) tutti i punti a coordinate intere del piano con ascissa compresa tra -1 e 5;

(vi) l'unione di una semistriscia e di una semiretta.

Risultati dei quesiti

1.32 (c)
1.33 (b)
1.34 (d)
1.35 (d)
1.36 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{V}}$
1.37 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{V}}$

Risultati degli esercizi di riepilogo

1.38 Per determinare il dominio di f basta raccogliere le prime coordinate degli elementi di $\mathcal{G}_f$. Si ottiene $A = \{ 1,2,3,4 \}$. Si ha che f non è suriettiva poiché c non compare in nessuna coppia di $\mathcal{G}_f$. Inoltre f non è iniettiva poiché ci sono due coppie di $\mathcal{G}_f$ che hanno a come seconda componente. In particolare f non è biettiva. Per ottenere $Im(f)$ basta raccogliere le seconde componenti degli elementi di $\mathcal{G}_f$. Si ottiene $Im(f) = \{ a,b,d \}$.

1.39

(i) Si procede esattamente come nell'ex 1.15.

(ii) Si ricalchi lo svolgimento dell'ex 1.2. Ovviamente è vero anche il viceversa. Èfacile convincersi che i numeri della forma $4k+1$ o $4k+3$, per k intero, sono numeri dispari.

(iii) Si ha che: $(A \cup B) \setminus B = \{ b,c \}$, $(A \cap B) \setminus B = \varnothing$, $A \setminus (A \cap B) = \{ b,c \}$, $A \setminus (A \cup B) = \varnothing$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{ b,c,e \}$.