Antonio Cigliola

ANALISI MATEMATICA UNO

Indice

Capitolo 1

Logica elementare

In questa prima parte introduttiva ci occuperemo di illustrare gli strumenti che servono in Matematica per formulare correttamente ed in maniera universalmente condivisa i risultati. Stabiliremo qui le *regole del gioco* per enunciare coerentemente definizioni e teoremi, capiremo come dimostrare correttamente la validità di una proprietà e, cosa molto importante, impareremo a verificare in maniera giusta e convincente che alcune asserzioni sono false.

1.1 Grammatica e Matematica

Come ogni disciplina scientifica, anche la Matematica ha bisogno di un *linguaggio* ed ha pertanto bisogno di una grammatica che ne regoli la corretta costruzione di parole e frasi. Presentiamone brevemente i suoi elementi ed il suo funzionamento. Ogni linguaggio ha bisogno di un *alfabeto* specifico fatto dei simboli usati per costruire parole e frasi e di una *sintassi* che studia le relazioni tra i vari periodi dal punto di vista formale. Poiché il linguaggio comune è spesso involuto ed ambiguo per le nostre necessità, nelle scienze viene usato un linguaggio univoco ed universalmente accettato: il *linguaggio formale*. L'alfabeto matematico è l'insieme di tutti i simboli matematici, alcuni dei quali sono ben noti, ad esempio:

$$1 \qquad + \qquad \log \qquad (\qquad \infty$$

ed altri che impareremo ad utilizzare in seguito come

$$\exists \qquad \vee \qquad \cap \qquad \varnothing.$$

La Logica, infine, rappresenta la sintassi della Matematica. Essa stabilisce se una proposizione è sintatticamente *ben formata* e se può quindi far parte del discorso matematico. Possiamo quindi dare la seguente:

Definizione 1.1. Una *proposizione* in Matematica è una affermazione di cui si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa.

Ad esempio sono proposizioni:

- ‘2 è un numero primo’,

- ‘Non esistono malfattori sulla Terra’,

- ‘Se piove mi bagno’.

Non sono invece proposizioni matematiche frasi del tipo:

- ‘Quali sono le province del Lazio?’,

- ‘Che bella la luna stasera!’

- ‘Il Monte Bianco è molto alto’.

1.2 Concetti primitivi ed Assiomi

Ma cos’è il vero? Cosa il falso? In breve: non ci preoccuperemo di dare una risposta a questa domanda, lasciamo che se ne occupino i filosofi. Si darà infatti per buono il concetto della verità, diremo che esso è un *concetto primitivo*. Ogni discorso scientifico necessita di un punto iniziale a partire dal quale costruire tutto il resto. Servono quindi dei minimi termini intuitivi, facilmente comprensibili da chiunque e che non necessitano di ulteriori esemplificazioni. Ne sono esempio il vero, l’insieme vuoto, il numero zero, i punti e le rette del piano e dello spazio.

Questi oggetti indefinibili, ma facilmente comprensibili, godono di proprietà elementari, gli *assiomi* o *postulati*, che non possono essere provate e vengono date per buone. Si pensi ad esempio ai celebri postulati di Euclide necessari per fondare la Geometria piana o agli assiomi di Peano che presenteremo in chiusura del capitolo per costruire l’insieme dei numeri naturali.

1.3 Calcolo proposizionale

Come si fa nella grammatica dei linguaggi comuni, ci proponiamo di imparare a costruire grazie alla Logica delle frasi più complesse a partire da altre proposizioni. Procederemo come in Aritmetica, quando si sommano o si moltiplicano due numeri per ottenerne un terzo. D’ora in poi useremo, come di consueto, **V** per distinguere le proposizioni vere da quelle false, indicate con **F**. Useremo infine le lettere

$$p, q, r, \ldots, I, T$$

per le proposizioni.

Servendosi delle congiunzioni e delle preposizioni di uso comune è possibile costruire tipi diversi di periodi complessi che non utilizzeremo in Matematica. I soli *connettivi logici* che considereremo sono la negazione, la congiunzione, la disgiunzione ed il periodo ipotetico. Vediamo come funzionano.

Definizione 1.2. Siano p e q proposizioni. Allora

(i) la *negazione* di p,
$$\overline{p},$$
è falsa se p è vera mentre è vera quando p è falsa.

(ii) la *congiunzione* di p e q,
$$p \wedge q,$$
produce una proposizione che è vera se e solo se sia p che q sono vere.

(iii) la *disgiunzione* di p e q,
$$p \vee q,$$
produce una proposizione che è falsa se e solo se sia p che q sono false.

(iv) *se* p *allora* q,
$$p \Rightarrow q,$$
produce una proposizione che è falsa se e solo se p è vera mentre q è falsa.

(v) p *equivale a* q,
$$p \Leftrightarrow q,$$
si ha quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Esempio 1.3. Vediamo alcuni esempi:

- La frase '3 non è un numero dispari' è falsa;
- 'Tutti i rettangoli sono quadrati o $\pi < 3$' è anch'essa falsa;
- 'Se $2 < 5$ allora il Sole è una stella' è invece vera;
- 'I quadrati sono rombi *e* Colombo scoprì l'America nel 1492' è anch'essa vera.

Esempi di equivalenze sono

- 'Gauss era un matematico *se e solo se* i pentagoni hanno 5 lati'
- 'Un numero intero è pari *se e solo se* il suo successivo è dispari'.

Quando si ha una implicazione
$$p \Rightarrow q$$
si è soliti dire che
$$p \quad \text{è } \textit{condizione sufficiente} \text{ per} \quad q$$
e che
$$q \quad \text{è } \textit{condizione necessaria} \text{ per} \quad p.$$
Quando si ha l'equivalenza
$$p \Leftrightarrow q$$
si è soliti dire che
$$q \quad \text{è condizione necessaria e sufficiente per} \quad p.$$
Facciamo qualche esempio. Vale l'enunciato

> Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un rombo è che sia un quadrato.

Ciò è vero perché tutti i quadrati sono dei rombi. Osserviamo che se una condizione è necessaria, non è affatto detto che sia anche sufficiente. Ad esempio, non tutti i rombi sono dei quadrati.
Nelle prossime pagine impareremo a trattare con cautela le implicazioni tra proposizioni. Una celebre condizione che è sia necessaria che sufficiente è stabilita dal Teorema di Pitagora:

> Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia rettangolo è che il quadrato costruito sull'ipotenusa sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

È bene sottolineare che quando si formula una frase del discorso matematico usando il linguaggio comune, bisogna fare attenzione a tradurlo utilizzando solo i connettivi logici che abbiamo presentato. Ad esempio

> Il triangolo ABC è isoscele *poiché* è equilatero.

andrebbe riscritta come

> Se il triangolo ABC è equilatero, allora è isoscele.

La frase

> Il numero 10 è multiplo di 5 *ma* non di 3.

diventa

> Il numero 10 è multiplo di 5 e non è multiplo di 3.

1.4 Tabelle di verità

Per capire meglio il funzionamento dei connettivi logici, si utilizzano le *tabelle di verità*. Esse servono a calcolare in maniera più immediata il valore di verità di una proposizione composta in base a quello delle componenti. La seguente tabella riassume il comportamento dei connettivi introdotti nella Definizione 1.2.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Le tabelle di verità sono particolarmente utili quando vogliamo stabilire che due espressioni sono logicamente equivalenti. Questo accade se esse assumono gli stessi valori di verità indipendentemente da quello delle componenti. Facciamo qui due importantissimi esempi, le leggi di De Morgan.

Teorema 1.4. *Siano p e q proposizioni. Allora*

(i) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ *(prima legge di De Morgan);*

(ii) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ *(seconda legge di De Morgan).*

Dimostrazione. Basta usare le tavole di verità:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Dall'uguaglianza delle colonne corrispondenti segue la tesi. **QED**

Applichiamo a degli esempi queste leggi. Dire ad esempio

Non è vero che il Sole brilla e che Parigi non è in Italia.

equivale a dire che

O il Sole non brilla oppure Parigi è in Italia.

Inoltre

Non si dà il caso che 5 è minore o uguale a 4.

è lo stesso che dire

Il numero 5 non è minore di 4 e non è nemmeno uguale a 4.

Diremo che una proposizione è una *tautologia* se essa è sempre vera indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti. Una *contraddizione* invece è una proposizione sempre falsa. Nel successivo Teorema 1.5 vedremo due classici esempi di tautologie e contraddizioni: il principio di non contraddizione e del terzo escluso.

Seguendo l'idea della dimostrazione contenuta nella Proposizione 1.4 è possibile provare la seguente

Proposizione 1.5. *Siano p, q ed r proposizioni. Allora:*

(i) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(la doppia negazione afferma);*

(ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ *e* $p \vee p \Leftrightarrow p$ *(leggi di idempotenza);*

(iii) $p \vee \overline{p}$ *è una tautologia (principio del terzo escluso);*

(iv) $p \wedge \overline{p}$ *è una contraddizione (principio di non contraddizione);*

(v) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *e* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(proprietà commutativa);*

(vi) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ *(prima legge delle inverse);*

(vii) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow r)$ *è una tautologia (proprietà transitiva).*

Più che svolgere l'esercizio precedente, il che si fa in maniera meccanica usando le tabelle di verità, ci sembra utile dare alcuni esempi per le proprietà elencate. Ad esempio, usando la doppia negazione,

> Non è vero che il ghiaccio non fonde a $0°C$

è lo stesso che dire

> Il ghiaccio fonde a $0°C$.

Le leggi di idempotenza in breve stabiliscono che non è necessario ripetere la stessa cosa due o più volte: non si direbbe nulla di nuovo.
Il principio del terzo escluso stabilisce che data una proposizione qualsiasi, questa è vera oppure lo è la sua negazione. Praticamente è come dire che ogni proposizione matematica o è vera o è falsa: *tertium non datur*.
Sulla stessa linea il principio di non contraddizione dice che non possono mai essere vere sia una proposizione che la sua negazione. Ad esempio, per il principio del terzo escluso, il numero 3 o è pari o è dispari. Per il principio di non contraddizione il numero 3 non può essere pari e dispari contemporaneamente.
La proprietà commutativa è abbastanza chiara. Proprio come per i numeri, non importa in che ordine si congiungono o si disgiungono due proposizioni. Ad esempio

> L'acqua è inodore ed è incolore.

asserisce lo stesso che

> L'acqua è incolore ed inodore.

Come esempio della proprietà transitiva si pensi ad esempio a

> Se ogni cittadino romano è italiano ed ogni cittadino italiano è europeo, allora ogni cittadino romano è europeo.

Veniamo ora alla prima legge delle inverse, delicata ed importantissima. Essa stabilisce che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è equivalente all'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, che è detta la *contronominale* di $p \Rightarrow q$. Consideriamo l'asserto

> Se un animale è un gatto, allora è un mammifero.

Questa equivale a dire che

> Se un animale non è un mammifero, allora non può essere nemmeno un gatto.

Si osservi che, in generale, data l'implicazione $p \Rightarrow q$, non si può dedurre nient'altro se non la sua contronominale. Ad esempio non è detto che valga $q \Rightarrow p$: se un animale è un mammifero, non è necessariamente un gatto, potrebbe infatti anche essere un cavallo.

1.5 Tecniche dimostrative

Quanto studiato sopra ci servirà ora per presentare le tecniche dimostrative che comunemente vengono usate in Matematica per provare teoremi ed asserzioni varie. Qui illustreremo la dimostrazione diretta, la prima legge delle inverse e la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo di voler dimostrare che una certa ipotesi I implica una tesi T. La *dimostrazione per via diretta* prevede di partire dall'asserzione I e di raggiungere la tesi T per mezzo di un numero finito di implicazioni successive logicamente accettabili. Lo schema dimostrativo è:

$$I \quad\Rightarrow\quad p_1 \quad\Rightarrow\quad p_2 \quad\Rightarrow\quad \dots \quad\Rightarrow\quad p_n \quad\Rightarrow\quad T,$$

dove $p_1, \dots, p_n$ sono proposizioni intermedie. La sua validità è garantita dalla proprietà transitiva dell'implicazione, vedi Proposizione 1.5 punto (vii). Prima di fare un esempio di una dimostrazione in cui è applicata questa tecnica, facciamo alcuni brevi richiami.
Ricordiamo che un numero intero n si dice *pari* se esso è divisibile per 2, cioè esso può essere scritto come

$$n = 2h,$$

con h anch'esso intero. Un numero m invece si dice *dispari* quando non è divisibile per due. È facile provare che un numero dispari ha la forma

$$m = 2k + 1,$$

per qualche altro numero intero k. È chiaro che un numero intero o è pari o è dispari: non ci sono altre possibilità.
Infine, dati due numeri interi n ed m, diciamo che n è multiplo di m se possiamo scrivere n come prodotto di m per un altro numero intero t: $n = mt$. In tal caso si dice anche che n è *divisibile* per m. Proviamo il seguente risultato utilizzando la dimostrazione per via diretta.

Teorema 1.6. *Sia n un numero intero. Se n è dispari, allora anche n^2 è dispari.*

Dimostrazione diretta. Partiamo dall'ipotesi che n sia un numero dispari. Vogliamo provare che n^2 è anch'esso dispari. Siccome n è dispari, allora possiamo scrivere

$$n = 2k + 1,$$

con k numero intero. Allora

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Se poniamo

$$k' = 2k^2 + 2k,$$

allora

$$n^2 = 2k' + 1.$$

Ne segue che anche n^2 è un numero dispari. **QED**

La *prima legge delle inverse* suggerisce di dimostrare l'implicazione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta la *contronominale* di $I \Rightarrow T$, poiché per il punto (vi) della Proposizione 1.5, esse sono equivalenti. Quindi se è vera una, è vera anche l'altra. Si parte in pratica dalla negazione della tesi e per mezzo di passaggi logici si raggiunge la negazione dell'ipotesi. Applichiamo questo metodo nel provare il seguente risultato.

Teorema 1.7. *Sia n un numero intero. Se n non è multiplo di 3, allora n non è multiplo di 6.*

Dimostrazione della contronominale. Partiamo dal supporre che sia vera la negazione della tesi, cioè che n è multiplo di 6. Dobbiamo far vedere che ne discende la negazione dell'ipotesi e quindi che n è anche multiplo di 3. Ora se

$$n = 6t,$$

per qualche intero t, allora

$$n = 3 \cdot 2t,$$

come volevamo dimostrare. **QED**

Una tecnica molto simile - si badi a non confonderle! - è la celebre *dimostrazione per assurdo.* Si parte dal fatto che sia vera la negazione della tesi $\overline{T}$ assieme all'ipotesi I. Il nostro compito diventa dunque raggiungere una contraddizione C, un asserto che è evidentemente falso e che non può essere tollerato facendo Matematica. Infatti, definendo l'implicazione logica, abbiamo detto che delle ipotesi vere non possono mai implicare il falso. Lo schema dimostrativo è:

$$[(I \ \wedge \ \overline{T}) \Rightarrow C] \Rightarrow T.$$

Facciamo qualche esempio.

Teorema 1.8. *Sia n un numero intero. Se n^2 è dispari, allora anche n è dispari.*

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo vera l'ipotesi e che la tesi sia falsa. Quindi n^2 è dispari e, per assurdo, n è pari. Allora

$$n = 2h,$$

per qualche h intero. Sicché

$$n^2 = 4h^2 = 2(2h^2)$$

è pari anch'esso. Riassumendo n^2 è sia pari che dispari. Poiché questa è una contraddizione, la tesi deve necessariamente essere vera. **QED**

Per maggior chiarezza facciamo un altro esempio di dimostrazione in cui si applica la *reductio ad absurdum.* Dobbiamo richiamare prima alcune nozioni di geometria piana. Ricordiamo che due rette nel piano si dicono parallele se esse non hanno alcun punto in comune o, come si suol dire, esse non si incontrano mai. Il *V Postulato di Euclide* per la geometria piana asserisce che se dati un punto P ed una retta r nel piano che non passa per P, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela alla retta r. Applicando la dimostrazione per assurdo proveremo la proprietà transitiva del parallelismo.

Teorema 1.9. *Siano date r, s e t tre rette nel piano. Supponiamo che r è parallela a t e che anche t è parallela a s. Allora r ed s sono parallele.*

Dimostrazione per assurdo. Assieme all'ipotesi che r ed s sono entrambe parallele a t, supponiamo per assurdo che r ed s non siano parallele tra loro. Ciò significa che le rette r ed s si incontrano in almeno un punto, chiamiamolo P. Siccome t è parallela ad r, t non può contenere il punto P. Riassumendo, abbiamo trovato che la retta r passa per P ed è parallela a t. Similmente anche s passa per P ed è parallela a t. Questo contraddice il V postulato, poiché abbiamo trovato due rette distinte r ed s parallele a t e passanti per P. **QED**

Dall'unione dei Teoremi 1.6 e 1.8 segue la seguente equivalenza:

Teorema 1.10. *Sia n un numero intero. Allora n è dispari se e solo se n^2 è dispari.*

Lo stesso risultato può essere riformulato anche come

> Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero intero sia dispari è che il suo quadrato sia dispari.

Quando abbiamo una equivalenza $p \Leftrightarrow q$, è facile provare che vale anche $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$. Ad esempio possiamo dire che

> Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero intero sia pari è che anche il suo quadrato sia pari.

Riprendiamo ora a dire quanto abbiamo accennato sopra. Bisogna fare attenzione a maneggiare ed invertire con cautela le implicazioni logiche. Dato un teorema $I \Rightarrow T$, l'unica implicazione che è automaticamente vera è il *teorema contronominale o contrapposto* $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$. Nulla si può dire a priori della verità del *teorema inverso o reciproco* $T \Rightarrow I$. Se è vero va dimostrato separatamente: non si può farlo discendere da $I \Rightarrow T$ immediatamente. Lo stesso vale per il *teorema contrario* $\overline{I} \Rightarrow \overline{T}$. Facciamo qualche esempio per chiarire quanto detto. È ben noto che vale l'implicazione

> Se un poligono è un quadrato, allora è un poligono regolare.

Il teorema inverso stabilisce che

> Se un poligono è regolare, allora esso è un quadrato.

Questo ovviamente è falso in generale. I triangoli equilateri ad esempio, non sono dei quadrati, ma sono comunque dei poligoni regolari con tre lati. Il teorema contrario invece asserisce che

> Se un poligono non è un quadrato, allora non è un poligono regolare.

Anche questa asserzione è falsa: esistono i pentagoni regolari che non sono quadrati tuttavia sono dei poligoni regolari. Si osservi ad ultimo che il teorema inverso e il teorema contrario sono tra loro equivalenti.

1.6 Le proposizioni della Matematica

Concludiamo questa parte introduttiva di Logica presentando come vengono etichettate le proposizioni in Matematica. Abbiamo già presentato i concetti primitivi ed i postulati come il punto di partenza da cui inizia il discorso matematico.

Si chiama *Definizione* una proposizione in cui si introduce un nuovo oggetto in termini di altri che sono stati presentati e studiati precedentemente. Ad esempio, supponiamo di sapere già cosa è un rettangolo, un quadrilatero che ha quattro angoli retti. A questo punto è possibile definire il quadrato in termini del rettangolo che già si conosce:

Si definisce quadrato un rettangolo che ha tutti e quattro i lati uguali.

Una *Proposizione* propriamente detta, è una asserzione che contiene un'implicazione in cui vengono stabilite delle proprietà di un certo oggetto. Esse necessitano di una dimostrazione rigorosa che segua un metodo valido accettato dalla Logica. Ne sono esempi i vari risultati sui numeri pari e dispari che abbiamo provato sopra. Spesso le proposizioni vengono denominate *Teoremi* quando racchiudono un risultato molto importante e fondamentale per il discorso matematico. Un *Lemma* è una proposizione preliminare, che contiene un risultato che serve ad abbreviare le dimostrazioni dei risultati che lo seguono. Un *Corollario* infine è una proprietà che segue immediatamente da un risultato precedente la cui dimostrazione è banale e spesso la si riassume in una sola riga.

1.7 Logica predicativa

La parte della Logica che abbiamo studiato finora si chiama Logica proposizionale. D'ora in poi lavoreremo con un tipo particolare di enunciati che sono molto importanti in Matematica: i predicati. Chiameremo *predicato logico* un'espressione linguistica $p(x, y, \dots)$ che dipende dai parametri $x, y, \dots$ e di cui si può decidere il valore di verità non appena si rimpolpano i parametri con oggetti concreti, Un esempio è il predicato

Oggi è Lunedì.

Così come è formulato, questo enunciato non è una proposizione nel senso matematico. Infatti giorno dopo giorno il suo valore di verità cambia e non si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa. Se al posto del parametro *oggi* sostituiamo un giorno in particolare, tale enunciato diventa una proposizione. Ad esempio

Il 23 Settembre 2013 è Lunedì.

è una proposizione ed è vera. In questo modo il predicato $p(\text{oggi})$ è diventato la proposizione $p(\text{23 Settembre 2013})$.

I parametri da cui dipende un predicato assumono valori all'interno di un opportuno *insieme di variabilità*. Ad esempio nel predicato $p(\text{oggi})$, il parametro *oggi* assume valori nell'insieme dei vari giorni. Per limitare o controllare tale variabilità vengono molto spesso utilizzati i *quantificatori*. La loro utilità risiede nel fatto che aiutano a determinare velocemente la veridicità, senza dover necessariamente sostituire tutti i possibili valori che il parametro può assumere. Si utilizzano il quantificatore universale

$$\forall,$$

che si legge *per ogni*, ed il quantificatore esistenziale

$$\exists,$$

leggi *esiste*. Ad ultimo diciamo che per scrivere *non esiste* si usa il simbolo

$$\nexists\,.$$

Consideriamo le frasi seguenti:

Ogni insetto è una farfalla.

e

Esistono due numeri interi la cui somma vale -2.

In linguaggio matematico si riscrivono rispettivamente come

$$p(n): \quad \forall \text{ insetto } n,\ n \text{ è una farfalla.}$$

e

$$q(x, y): \quad \exists\, x \wedge \exists\, y \text{ numeri interi tali che } x + y = -2.$$

L'insieme di variabilità di $p(n)$, predicato ad una variabile, è l'insieme di tutti gli insetti. I parametri x ed y del predicato a due variabili $q(x, y)$ variano nell'insieme dei numeri interi. Il primo predicato è falso, infatti $p(\text{ape})$ non è vera: non è verificata l'universalità. Il secondo invece è vero poiché è vero $q(-4, 2)$; si ha $-4 + 2 = -2$.

È molto importante imparare a negare correttamente i predicati soprattutto in presenza dei quantificatori. Una errata applicazione delle regole che illustreremo ora è alla base di numerosissimi ed imperdonabili errori che spesso gli studenti (e non solo) compiono nello svolgere esercizi e nel dimostrare risultati.
Proviamo ora a negare il predicato

Tutti i gatti sono persiani.

Dire che ciò non è vero, non significa che *nessun* gatto è persiano o che tutti i gatti non sono persiani (imprecisione molto diffusa), significa invece esibire *almeno un* gatto che non è un persiano, così da violare l'universalità del *tutti*. Esistono ad esempio i gatti soriani ed i siamesi. Si badi che i gatti potrebbero essere anche tutti *non persiani*, ma a noi per negare il *tutti* basta sapere che ce n'è almeno uno che non è persiano. Supponiamo di avere in generale il predicato

$P(x):\quad \forall\ x$ è vera la proprietà $p(x)$.

Negare una proprietà universale equivale a dire che esiste almeno un dissidente che viola tale proprietà, ovvero che verifica la negazione di questa proprietà. Quindi

$\overline{P(x)}:\quad \exists\ x$ per cui è vera la proprietà $\overline{p(x)}$.

Consideriamo ora la frase

Esiste un triangolo rettangolo che è isoscele.

Negare questo significa dire che di tutti i triangoli rettangoli che si possono considerare, nessuno è isoscele. Non ci basta che uno solo non sia isoscele, vogliamo che nessuno di essi lo sia. La negazione del quantificatore esistenziale coinvolge quindi quello universale. Supponiamo di avere in generale il predicato

$Q(x): \exists\ x$ per cui è vera la proprietà $q(x)$.

Negare ciò significa dire che tutti gli oggetti violano tale proprietà, ovvero che tutti verificano la negazione di questa proprietà. Quindi

$\overline{Q(x)}: \forall\ x$ è vera la proprietà $\overline{q(x)}$.

Riassumendo abbiamo quindi la seguente regola:

$$\overline{\forall\ x : p(x)} \Leftrightarrow \exists\ x : \overline{p(x)} \qquad \text{e} \qquad \overline{\exists\ x : p(x)} \Leftrightarrow \forall\ x : \overline{p(x)}.$$

Ai quantificatori studiati si è soliti aggiungerne un altro. È spesso necessario precisare quando l'esistenza di un oggetto è unica. Si usa in questo caso $\exists!$ che si legge *esiste ed è unico*. Ad esempio va usato nella formulazione del celeberrimo V Postulato di Euclide:

Dati nel piano un punto P ed una retta r, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela ad r.

Si deve fare attenzione quando si nega l'esistenza unica. Dire infatti che

non esiste un unico x che verifica $p(x)$

può da un lato significare che

non esiste alcun x che verifica $p(x)$

oppure che

esiste più di un x che verifica la proprietà $p(x)$.

Sempre considerando il quinto postulato di Euclide, storicamente negando esso sono nate le *geometrie non euclidee*. La geometria che nega del tutto l'esistenza della retta parallela s si chiama geometria ellittica, quella che ne ammette l'esistenza, ma che ne nega l'unicità, si chiama geometria iperbolica.

1.8 Esercizi

Esercizio 1.1. Si indichino con c i cani, con u gli uomini e con $p(c, u)$ il predicato 'c è amico di u'. Usando il linguaggio simbolico, riscrivere le frasi p_1 ='Ogni cane è amico di qualche uomo' e p_2 ='C'è solo un cane amico di tutti gli uomini'.
Usando il linguaggio comune, riscrivere gli enunciati

(i) $q_1 = \exists\ c\ \exists!\ u : p(c, u)$;

(ii) $q_2 = \exists\ c\ \exists\ u : p(c, u)$;

(iii) $q_3 = \forall\ c\ \forall\ u : p(c, u)$.

[Le prime due frasi diventano $p_1 : \forall\ c\ \exists\ u : p(c, u)$ e $p_2 : \exists!\ c\ \forall\ u : p(c, u)$.
Le altre tre proposizioni diventano:
q_1 ='C'è un cane che è amico di un uomo soltanto',
q_2 ='C'è un cane che è amico di un uomo'
q_3 ='Tutti i cani sono amici di tutti gli uomini'.]

Esercizio 1.2. Spiegare perché è falsa la seguente affermazione: 'Se n è un numero negativo, allora anche $n + 3$ è negativo.'

[Questo enunciato può essere riformulato come un predicato nella variabile n. Ad esempio $p(n) : \forall$ numero negativo n anche il numero $n + 3$ è negativo. Così riformulato è più facile negarlo e mostrare quindi che è falso. Per quanto abbiamo imparato sopra, per negare il quantificatore universale $\forall$ dobbiamo esibire almeno un numero n che è negativo, ma tale che $n + 3$ è positivo. Ad esempio $n = -2$ fa al caso nostro poiché $n + 3 = 1$ che è un numero positivo.]

Esercizio 1.3. Usando il linguaggio matematico, riscrivere la seguente proposizione: 'Non c'è un luogo in cui piove ogni giorno'.

[Indichiamo con g i giorni, con l i luoghi e con $p(g, l)$ il predicato 'Nel giorno g piove nel luogo l'. Allora la frase della traccia diventa: $\overline{\exists\ l\ \forall\ g : p(g, l)}$. Ricordando come si negano i quantificatori più semplicemente otteniamo la formulazione $\forall\ l\ \exists\ g : \overline{p(g, l)}$ che si legge 'In ogni luogo c'è un giorno in cui non piove'.]

Esercizio 1.4. Dimostrare la seguente proposizione 'Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, allora n non è multiplo di 10'. Formulare l'implicazione contronominale, inversa e contraria. Stabilire se è vera l'implicazione inversa.

[Per comodità conviene provare la contronominale che dice 'Se n è multiplo di 10, allora n è pari'. Ciò è vero poiché se $n = 10m$, per qualche intero m, allora vale anche $n = 2(5m)$ che è un numero pari.
La proposizione inversa è 'Se n non è multiplo di 10, allora n è dispari' (che è falsa).
La contraria è 'Se n è pari, allora n è multiplo di 10' (falsa anche questa).]

Esercizio 1.5. Siano p: 'ABC è un triangolo rettangolo' e q: 'ABC è un triangolo scaleno'. Scrivere il contenuto delle espressioni

(i) $\overline{p}$,

(ii) $p \wedge q$,

(iii) $p \vee q$,

(iv) $p \wedge \overline{q}$,

(v) $\overline{p} \vee \overline{q}$,

(vi) $\overline{\overline{q}}$,

(vii) $p \Rightarrow q$,

(viii) $q \Rightarrow \overline{q}$.

[Nell'ordine si ottengono le proposizioni: $\overline{p}$:'Il triangolo ABC non è rettangolo';
$p \wedge q$:'Il triangolo ABC è rettangolo e scaleno';
$p \vee q$:'Il triangolo ABC è rettangolo o scaleno';
$p \wedge \overline{q}$:'Il triangolo ABC è rettangolo e non è scaleno';
$\overline{p} \vee \overline{q}$:'Il triangolo ABC o non è rettangolo o non è scaleno';
$\overline{\overline{q}}$:'Non è che il triangolo ABC non è scaleno';
$p \Rightarrow q$:'Se il triangolo ABC è rettangolo, allora è scaleno';
$q \Rightarrow \overline{q}$:'Se il triangolo ABC è scaleno, allora non è scaleno'.]

Esercizio 1.6. Siano date p e q proposizioni. Costruire le tabelle di verità di $\overline{p} \vee q$; $(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$; $q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$.

[Si ottiene la tabella

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$	$q \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

]

Esercizio 1.7. Dire a quale delle seguenti proposizioni è equivalente: 'Non tutte le mele sono dolci'

(i) Qualche mela è dolce.

(ii) Tutte le mele non sono dolci.

(iii) Almeno una mela non è dolce.

(iv) Nessuna mela è dolce.

(v) Qualsiasi mela è dolce.

[c)]

Esercizio 1.8. A quale delle seguenti è equivalente la negazione della frase 'In ogni città c'è solo una curva pericolosa'?

(i) Tutte le curve di Roma sono pericolose.

(ii) C'è una città in cui nessuna o tutte le curve sono pericolose.

(iii) Non esiste una città con una curva pericolosa.

(iv) A Parigi non ci sono curve pericolose.

(v) In ogni città tutte le curve sono pericolose.

[b)]

Capitolo 2

Teoria degli insiemi

In questa sezione ci occuperemo di presentare alcuni argomenti elementari scelti di Teoria degli insiemi, imprescindibili per una buona formazione matematica.

2.1 Insiemi e sottoinsiemi

La Matematica si fonda su un importantissimo concetto primitivo, il concetto di *insieme* che può essere pensato come una collezione, un aggregato di certi oggetti, concreti o astratti, che chiameremo i suoi *elementi*. Come di consueto useremo le lettere maiuscole

$$A, B, X, \ldots$$

per indicare gli insiemi, quelle minuscole

$$a, b, x, \ldots$$

per gli elementi.

Per dire che l'elemento a *appartiene* all'insieme A scriveremo

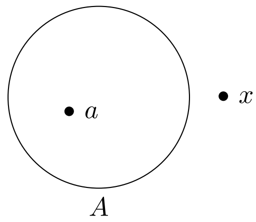
$$a \in A,$$

per dire invece che l'elemento x non appartiene ad A si scrive

$$x \notin A.$$

Si dice anche che l'insieme A *contiene* l'elemento a e che non contiene x.

Per lavorare più intuitivamente con gli insiemi ci si serve dei *diagrammi di Eulero-Venn.* Un insieme viene rappresentato con un cerchio, i suoi elementi vengono rappresentati al suo interno, gli oggetti che non gli appartengono al suo esterno. Ovviamente un oggetto dato o appartiene o non appartiene ad un insieme, non ci sono altre possibilità. Riconsideriamo l'insieme A preso sopra che contiene a ma non x. Graficamente abbiamo:



Gli insiemi possono essere rappresentati anche per via *estensiva* o per *elencazione* scrivendo esplicitamente tutti i suoi elementi. Ad esempio, l'insieme P delle province della Puglia può essere scritto come

$$P = \{\, \text{Bari, BAT, Brindisi, Foggia, Lecce, Taranto} \,\}\,.$$

Si può anche utilizzare la rappresentazione per via *intensiva* o per *caratteristica* dove ci si serve di un predicato per descrivere tutti gli elementi in un colpo solo. Ad esempio l'insieme P delle province pugliesi diventa

$$P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$$

che si legge

P è l'insieme delle x tali che x è una provincia della Puglia.

Ci siamo serviti del predicato

$p(x)$: 'x è una provincia della Puglia'.

A latere sottolineiamo che il simbolo | viene letto *tale che*. Spesso, per abbreviare questa espressione, si usano il simbolo : come anche l'acronimo *t.c.*, ma mai nella descrizione intensiva di un insieme in cui si usano | e :. Diremo che l'insieme A è *sottoinsieme* dell'insieme B (o che A è contenuto in B) e scriveremo

$$A \subseteq B,$$

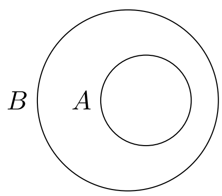
se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. Formalmente si scrive

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A : \; x \in B.$$

I due punti in questo caso si leggono *risulta che*.

L'insieme $P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$ è sottoinsieme dell'insieme $I = \{\, x \mid x \text{ è una provincia italiana} \,\}$.

Graficamente abbiamo



in maniera tale che gli oggetti racchiusi dal bordo di A sono necessariamente circondati anche da quello di B. Se A non è contenuto in B si scrive che $A \nsubseteq B$, in altri termini esiste $x \in A$ tale che $x \notin B$.

Il *principio di uguaglianza tra gli insiemi* stabilisce che due insiemi sono uguali se e solo se uno è sottoinsieme dell'altro. In altre parole:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A.$$

Essi hanno quindi esattamente gli stessi elementi. Quando si vorrà dimostrare che due insiemi sono uguali bisognerà far vedere vicendevolmente che uno è sottoinsieme dell'altro. Può accadere che un insieme A sia sottoinsieme di un insieme B, ma che essi non siano uguali. Questo vuol dire che tutti gli elementi di A sono elementi di B, ma che esiste un elemento di B che non è elemento di A. In tal caso si dice che A è strettamente contenuto in B e si scrive $A \subset B$ oppure $A \subsetneq B$ se si vuole enfatizzare che non sono uguali.

Abbiamo bisogno di altri due importanti assiomi: da un lato l'esistenza dell'*insieme vuoto*, indicato con

$$\varnothing.$$

Esso è un insieme che non contiene alcun elemento. Ci serve poi l'*insieme universo*, U, che invece contiene tutti gli oggetti. L'insieme U solitamente viene indicato nei diagrammi con un rettangolo.

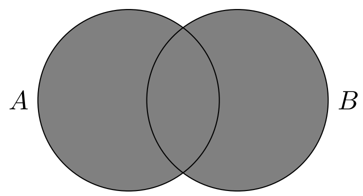
2.2 Operazioni tra insiemi

Come con le proposizioni e con i numeri, si può operare anche con gli insiemi.

Dati due insiemi A e B, chiameremo *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ costituito da tutti gli elementi di A o di B presi insieme:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

Graficamente l'unione è la parte colorata in figura:



Esempio 2.1. Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, la loro unione è l'insieme

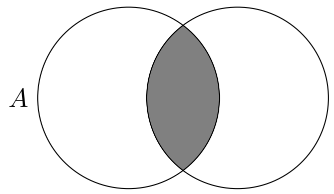
$$A \cup B = \{ 1, 2, a, b, c \}.$$

Ovviamente le ripetizioni vanno cancellate.

Dati due insiemi A e B, chiameremo *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni di A e di B:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Graficamente l'intersezione è la parte colorata in figura:



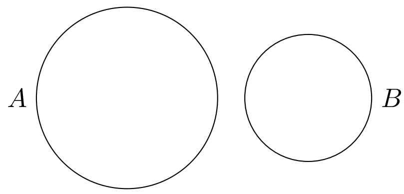
Esempio 2.2. Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, la loro intersezione è l'insieme

$$A \cap B = \{ 1 \}.$$

Quando due insiemi A e B non hanno alcun elemento in comune, accade che

$$A \cap B = \emptyset$$

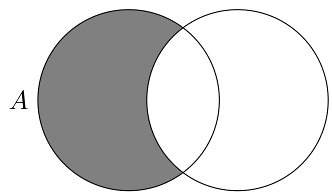
e si dice che A e B sono *disgiunti*. Graficamente si hanno due cerchi separati che non si toccano:



È possibile definire anche la differenza tra due insiemi. Dati due insiemi A e B, chiameremo *differenza* di A e B l'insieme $A \setminus B$ costituito dagli elementi di A che non sono elementi di B:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}.$$

Graficamente è la parte colorata in figura:



Esempio 2.3. Dati $A = \{\, 1, 2, a, b \,\}$ e $B = \{\, 1, c \,\}$, si ha che

$$A \smallsetminus B = \{\, 2, a, b \,\} \,.$$

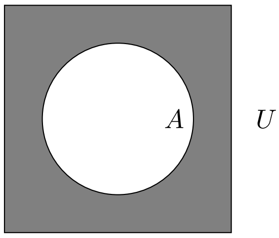
Si osservi che in generale $A \smallsetminus B \neq B \smallsetminus A$. Infatti nel nostro caso

$$B \smallsetminus A = \{\, c \,\} \,.$$

Diamo un'ultima importantissima definizione. Dato un insieme A, si definisce il *complementare* di A, indicato con $\overline{A}$, l'insieme costituito da tutti gli oggetti che non sono in A:

$$\overline{A} = \{\, x \mid x \notin A \,\} \,.$$

Per rappresentarlo graficamente ci si serve dell'insieme universo:



Inoltre vale la seguente uguaglianza $A \smallsetminus B = A \cap \overline{B}$ (lo si provi per esercizio).

Non deve sfuggire il fatto che l'unione è stata definita a partire dalla disgiunzione di due predicati, l'intersezione dalla congiunzione ed il complementare dalla negazione. Infatti la Logica e la Teoria degli insiemi sono strettamente interconnesse tra loro. A partire dalle proprietà viste per i connettivi logici si possono dedurre le analoghe proprietà per le operazioni tra insiemi. Enunceremo solamente il seguente risultato che è l'analogo della Proposizione 1.5.

Proposizione 2.4. *Siano A, B e C insiemi. Allora:*

(i) $\varnothing \subseteq A$ *(il vuoto è contenuto in ogni insieme)*

(ii) $A \subseteq A$ *(ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso)*

(iii) $A \cap \varnothing = \varnothing$ *e* $A \cup \varnothing = A$

(iv) $\overline{\overline{A}} = A$

(v) $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$ *(legge d'idempotenza)*

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

(vii) $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$ *(proprietà commutativa)*

(viii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(proprietà associativa)*

(ix) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *e* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(leggi di De Morgan)*

Dato un insieme A, indicheremo con

$$\mathcal{P}(A)$$

l'*insieme delle parti* di A i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A. In particolare $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ ed $A \in \mathcal{P}(A)$.

Esempi 2.5. (i) Abbiamo che

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$$

perché l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso.

(ii) Se consideriamo $A = \{ 1 \}$, allora

$$\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \} \} .$$

(iii) Infine, se prendiamo $B = \{ a, b \}$, allora

$$\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{ a \} , \{ b \} , \{ a, b \} \} .$$

Dati un insieme A ed un suo elemento a, si deve fare attenzione a distinguere l'elemento a dall'insieme $\{ a \}$, che è l'insieme costituito dal solo elemento a. Non si deve far confusione tra i simboli che abbiamo introdotto sopra. Ad esempio sono giuste ed equivalenti le scritture

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad \{ a \} \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad \{ a \} \in \mathcal{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{ a \} .$$

Non hanno invece alcun senso

$$a \subseteq A \qquad a \subseteq \{ a \} \qquad a \in \mathcal{P}(A) \qquad \{ a \} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Un'altra importante operazione che si può definire tra insiemi è il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, definiamo il *prodotto cartesiano* di A e B, l'insieme $A \times B$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* costituite da un elemento di A ed un elemento di B. Più precisamente

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \} .$$

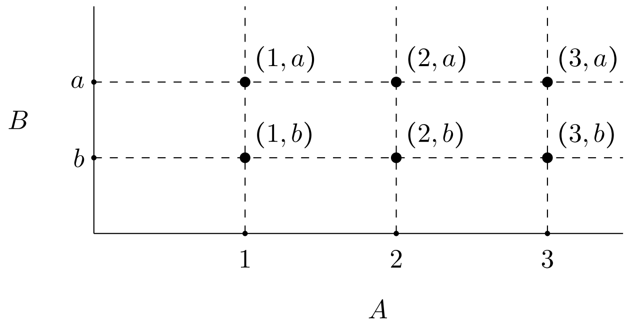
Se $A = B$, allora si è soliti porre per analogia con i numeri $A \times A = A^2$.

Esempio 2.6. Siano dati gli insiemi $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ a, b \}$. Allora si ha che

$$A \times B = \{ (1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b) \} .$$

Anche il prodotto cartesiano di due insiemi ha diritto ad una sua rappresentazione grafica. I due insiemi *fattori* vengono schematizzati con due rette perpendicolari. I loro elementi vengono poi rappresentati con dei punti su tali rette. Si costruisce così una rete a maglie rettangolari i cui nodi sono le coppie ordinate, elementi del prodotto cartesiano. Questa rappresentazione è detta *cartesiana*.

Riprendendo gli insiemi A e B dell'Esempio precedente, si ottiene:



Si può definire il prodotto cartesiano anche di tre o più insiemi in maniera analoga. Dati gli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, definiamo il loro prodotto cartesiano l'insieme:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n \} .$$

Il generico elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è detto n-upla ordinata. Il *principio di identità* delle n-uple ordinate stabilisce che, prese due n-uple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, esse sono uguali se e solo se sono uguali ordinatamente le *componenti omologhe*, cioè

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n.$$

2.3 Esercizi

Esercizio 2.1. Siano

$$A = \{ a, 1, 2, 3, b, 4 \} \qquad B = \{ a, c, 1, 2 \} \qquad C = \{ b, 3, d, 5 \} .$$

Calcolare

(i) $A \cup B$,

(ii) $A \cap B$,

(iii) $A \cup B \cup C$,

(iv) $B \cap C$,

(v) $(A \cap C) \cup B$,

(vi) $B \smallsetminus C$ e

(vii) $C \smallsetminus A$.

[Si ha che $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, a, b, c \}$,
$A \cap B = \{ a, 1, 2 \}$,
$A \cup B \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d \}$,
$A \cap B = \{ a, 1, 2 \}$,
$B \cap C = \varnothing$,
$(A \cap C) \cup B = \{ a, b, c, 1, 2, 3 \}$,
$B \smallsetminus C = B$,
$C \smallsetminus A = \{ d, 5 \}$.]

Esercizio 2.2. Siano dati gli insiemi $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ \varnothing, x \}$. Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$.

[Si ha che $\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$ e $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{ x \}, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, x \} \}$.]

Esercizio 2.3. Siano dati gli insiemi $A = \{ a, b \}$ e $B = \{ 0, 1 \}$. Calcolare $A \times B$ e $B \times A$. Sono uguali questi due insiemi?

[Si ha che il primo insieme $A \times B = \{ (a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1) \}$ e che $B \times A = \{ (0, a), (0, b), (1, a), (1, b) \}$. I due insiemi sono diversi poiché ad esempio la coppia $(a, 1)$ è un elemento del primo insieme ma non del secondo.]

Esercizio 2.4. A partire dalle leggi di De Morgan per la logica, dedurre le leggi di De Morgan per l'insiemistica.

[Siano dati gli insiemi A e B. Vogliamo provare che $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Consideriamo i predicati $p(x) : x \in A$ e $q(x) : x \in B$. Allora $p(x)$ è verificato da tutti e soli gli elementi di A, $q(x)$ da tutti e soli quelli di B. Prendiamo un elemento $x \in \overline{A \cup B}$. Questo equivale a dire che è vera la proposizione $\overline{p(x) \vee q(x)}$. Per la seconda legge di De Morgan della logica, a sua volta questa proposizione è equivalente a $\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}$. Infine, quest'ultima proposizione è equivalente a dire che $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Segue l'uguaglianza voluta dei due insiemi. La prima legge di De Morgan si mostra allo stesso modo.]

Esercizio 2.5. Determinare l'insieme delle parti dell'insieme $A = \{ a, b, \{ c, d \} \}$.

[I sottoinsiemi di A sono: $\varnothing$, $\{ a \}$,$\{ b \}$, $\{ \{ c, d \} \}$, $\{ a, b \}$, $\{ a, \{ c, d \} \}$, $\{ b, \{ c, d \} \}$, $\{ a, b, \{ c, d \} \}$]

Esercizio 2.6. Siano dati gli insiemi

$$A = \{ x, y, 1 \} \qquad B = \{ x, 1 \} \qquad C = \{ 1, y \}\,.$$

Calcolare gli insiemi $(A \times B) \cap (A \times C)$ e $A \times (B \cap C)$. Verificare che sono uguali.

[Sono entrambi uguali all'insieme $\{ (x,1), (y,1), (1,1) \}$.]

Esercizio 2.7. Per ciascuna delle seguenti coppie di insiemi A e B trovare, se possibile, un insieme C che è disgiunto da B ma non da A:

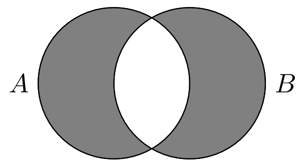
(i) $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 1 \}$

(ii) $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 1, 4 \}$

(iii) $A = \{ 1, 2 \}$ e $B = \{ 1, 2, 5 \}$

[Nei primi due casi ad esempio si possono considerare i seguenti insiemi: $C_{(i)} = \{ 3 \}$ e $C_{(ii)} = \{ 2 \}$. Nel terzo caso è impossibile perché A è sottoinsieme di B, quindi tutto ciò che interseca A, interseca anche B.]

Esercizio 2.8. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(i) $A \cap B$;

(ii) $(A \setminus B) \cup B$;

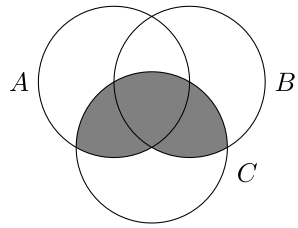
(iii) $A \cup B$;

(iv) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(v) $(A \cap B) \setminus A$.

[(iv)]

Esercizio 2.9. Si consideri la figura qui di seguito. Cosa rappresenta la parte colorata?



(i) $A \cap B \cap C$;

(ii) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

(iii) $(A \cup B) \setminus C$;

(iv) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(v) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

[(iv)]

Esercizio 2.10. Sia dato l'insieme $A = \{ x, y, z \}$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ [V]

(ii) $\varnothing \subset \{ x \}$ [V]

(iii) $\varnothing \in A$ [F]

(iv) $A \cup A = \{ 2x, 2y, 2z \}$ [F]

(v) $A = \{ x \} \cup \{ y \} \cup \varnothing \cup \{ z \}$ [V]

(vi) $y \in \mathcal{P}(A)$ ed $y \in A$ [F]

(vii) $A = \{ x, y \} \cup \{ y, z \} \cup \{ z, x \}$ [V]

Esercizio 2.11. Sia $A = \{a\}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) $a \in A$ [V]

(ii) $a \subseteq A$ [F]

(iii) $\{a\} \subseteq A$ [V]

(iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ [V]

(v) $\{\varnothing\} \in A$ [F]

(vi) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ [V]

(vii) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(A)$ [F]

(viii) $a \in \mathcal{P}(A)$ [F]

(ix) $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ [F]

(x) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ [V]

Esercizio 2.12. Ripetere l'esercizio 2.11 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ a\}$.

Esercizio 2.13. Ripetere l'esercizio 2.11 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ a,\ \{a\}\}$.

Esercizio 2.14. Ripetere l'esercizio 2.11 nell'ipotesi che sia $A = \{\varnothing,\ \{\varnothing,\ a\}\}$.

Esercizio 2.15. siano A e B insiemi. Sia $X \subseteq A \times B$. È vero che esistono due sottoinsiemi $S \subseteq A$ e $T \subseteq B$ tali che $X = A \times B$?

[In generale ciò è falso. Se ad esempio A e B hanno almeno due elementi, non è detto che un sottoinsieme di $A \times B$ è della forma sottoinsieme di A per sottoinsieme di B. Si pensi ad $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b\}$ con il sottoinsieme $X = \{(1,a),\ (2,b)\}$.]

Esercizio 2.16. Siano dati gli insiemi

$$A = \{\, a, b, 0, 1, 2, * \,\} \qquad B = \{\, a, c, *, 1 \,\} \qquad C = \{\, b, c, 0, 3 \,\} \qquad D = \varnothing.$$

Calcolare:

(i) $(A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$;

(ii) $[(A \cap B) \cap (C \cup D)] \smallsetminus (A \cup B)$;

(iii) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D)$.

Esercizio 2.17. Siano A, B insiemi. Dimostrare che

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Esercizio 2.18. Siano A, B insiemi. Dimostrare che

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

Provare che in generale l'inclusione è stretta, cioè che non vale l'inclusione contraria.

[Il viceversa non vale se ad esempio A e B sono insiemi distinti. In tal caso l'insieme $A \cup B$ non può essere reperito in nessun modo tra i sottoinsiemi di A o di B.]

Esercizio 2.19. Siano A, B insiemi. Stabilire se è vero che

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$$

Capitolo 3

Numeri reali

3.1 Insiemi numerici

I primi numeri che si incontrano tra i banchi di scuola sono i *numeri naturali*, quei numeri che utilizziamo per contare le quantità presenti in natura. Indicheremo con $\mathbb{N}$ il loro insieme

$$\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \}\,.$$

È possibile sia sommare che moltiplicare due numeri naturali ottenendone un terzo che è ancora un numero naturale. Si dice a tal proposito che addizione e moltiplicazione sono operazioni interne sui numeri naturali.

Purtroppo non sempre si può eseguire la differenza tra due numeri naturali. Ad esempio il calcolo $1 - 3$ è impossibile in $\mathbb{N}$. Per questo (e per altre ragioni di natura pratica) l'insieme dei numeri naturali viene ingrandito aggiungendo i *numeri negativi*. Con $\mathbb{Z}$ [†] indicheremo l'insieme dei *numeri interi relativi*, i cosiddetti numeri 'col segno':

$$\mathbb{Z} = \{\, \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots \}\,.$$

In questo insieme si possono calcolare senza difficoltà la somma, il prodotto e la differenza tra due numeri che danno per risultato ancora un numero intero. Si vede facilmente che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Il fatto che a volte in $\mathbb{Z}$ si produce un resto nella divisione, significa che non sempre si ottiene un numero intero quando si divide un numero intero per un altro. Si è soliti dire che la divisione non è una operazione interna in $\mathbb{Z}$. Per questo si introduce l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*:

$$\mathbb{Q} = \left\{\, \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \right\}.$$

Presa la *frazione* $\dfrac{a}{b}$, si dice che a è il *numeratore* e che b è il *denominatore*. Preso $c \in \mathbb{Z}$, con $c \neq 0, 1$ le due frazioni $\dfrac{ac}{bc}$ e $\dfrac{a}{b}$ possono essere identificate così da rappresentare lo

[†] Dal tedesco *zahl*, numero.

stesso numero razionale. Per far questo si cancella, semplificandolo, il fattore comune c dal numeratore e dal denominatore. Per comodità, presa una frazione, supporremo che il numeratore ed il denominatore non contengono alcun fattore in comune. In tal caso la frazione viene detta *ridotta ai minimi termini.* Un numero intero $a \in \mathbb{Z}$ può essere identificato con la frazione $\frac{a}{1}$ che ha 1 per denominatore. In questo modo si vede che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. L'insieme dei numeri razionali è piuttosto soddisfacente, in quanto in esso si possono effettuare tutte le operazioni di addizione, moltiplicazione, differenza e divisione tra numeri (a patto che il divisore sia diverso da zero). Le calcolatrici ad esempio utilizzando questo tipo di numeri.

Ricordiamo un altro fatto ben noto: i numeri razionali possono essere rappresentati anche mediante i numeri decimali, dei numeri cioè in cui due serie di cifre sono separate da una virgola. I numeri interi possono essere pensati come aventi parte decimale nulla. I numeri razionali non interi possono invece avere parte decimale limitata od illimitata. Nel primo caso si parla di numeri *decimali limitati*, nel secondo caso di *decimali illimitati.* Ne sono esempio rispettivamente $3,68$ e $2,7513131313\ldots$. In particolare, si trova che la parte decimale di un numero razionale, se è illimitata, è necessariamente *periodica.* Ciò significa che in essa può essere sempre trovato un gruppo finito di cifre, chiamato *periodo*, che si ripete infinite volte nello stesso ordine. Ad esempio nel numero $0,333\ldots$ il numero 3 si ripete infinite volte nella parte decimale. In $2,75131313\ldots$ si ripetono le cifre 13. Per comodità di scrittura, si è soliti indicare con un soprassegno la parte periodica che va così scritta una sola volta. Ad esempio, $0,333\cdots = 0,\overline{3}$ e $2,75131313\cdots = 2,75\overline{13}$.

Intuitivamente è possibile costruire numeri decimali illimitati che non sono periodici e che pertanto non appartengono a $\mathbb{Q}$. Per esempio il numero decimale

$$0,01001100011100001111...$$

che ha una successione sempre crescente di 0 e di 1, non è periodico. Numeri che non sono razionali vengono facilmente alla luce anche risolvendo semplici problemi della Geometria euclidea, come il calcolo della diagonale di un quadrato di lato 1 o della lunghezza di una circonferenza di raggio unitario. Già gli antichi Greci erano a conoscenza della irrazionalità di $\sqrt{2}$, quel numero che moltiplicato per sé stesso dà 2. Proponiamo qui di seguito una dimostrazione per assurdo che sembra sia dovuta al filosofo greco Aristotele di Stagira del III Secolo a.C.

Proposizione 3.1. *Il numero $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo supponendo che $\sqrt{2}$ possa essere portato nella forma $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con m ed n numeri interi positivi. Possiamo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini, altrimenti possiamo cancellare i fattori comuni dal denominatore e dal numeratore. Sicché $2 = \frac{m^2}{n^2}$, ovvero $2n^2 = m^2$. Siccome la quantità a sinistra dell'uguale è un numero pari, anche quello a destra deve esserlo. Quindi m^2 è un numero pari. Ciò accade se anche m è un numero pari. Quindi $m = 2h$, per qualche intero positivo h. Sostituendo sopra abbiamo $2n^2 = 4h^2$. Semplificando il 2, si ottiene $n^2 = 2h^2$. Poiché $2h^2$ è un numero pari, anche n^2 è pari e se ne deduce necessariamente che anche n è pari. Allora m ed n contengono entrambi il fattore 2 perché sono entrambi pari. Ma questo contraddice la nostra ipotesi che la frazione $\frac{m}{n}$ fosse ridotta ai minimi termini. L'assurdo è nato dall'aver supposto $\sqrt{2}$ razionale, quindi $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. **QED**

L'esistenza di grandezze incommensurabili con l'unità di misura fissata, come la misura della diagonale di un quadrato di lato 1 oppure la misura della circonferenza di raggio 1, avevano messo in crisi la scuola pitagorica che fondava la sua investigazione del mondo e della conoscenza sui razionali. Tali numeri però si dimostrano lacunosi, nasce così l'esigenza di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$ per permettere nuove operazioni come l'estrazione di radice. La fondazione rigorosa e formale dei numeri reali è uno dei problemi più difficili della Matematica; con esso si sono cimentati alcuni tra i più grandi studiosi del passato: Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor e altri. Per i limiti imposti dalle nostre lezioni non possiamo affrontare in dettaglio tale problema, preferiamo invece postulare l'esistenza di un insieme di numeri che verifica le proprietà dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: un *campo numerico ordinato e completo*, che possa cioè essere rappresentato graficamente con una retta.

3.2 L'insieme dei numeri reali

Nella presente sezione assumeremo dandola come assioma, l'esistenza dell'insieme dei *numeri reali* in base a ben precise proprietà che ci aspettiamo che esso verifichi. Indicheremo tale insieme con $\mathbb{R}$.
La costruzione formale e rigorosa di un modello di $\mathbb{R}$ ci porterebbe troppo lontano e confidiamo che, dopo gli anni di studio nelle scuole medie superiori, gli studenti abbiano un'idea più o meno precisa di tale insieme e delle sue proprietà. Diamo qui di seguito gli assiomi che definiscono $\mathbb{R}$ suddividendoli in tre gruppi: proprietà delle operazioni, dell'ordinamento e continuità. A partire da queste discenderanno tutte le proprietà delle quattro operazioni e del confronto tra numeri che ben conosciamo. Altri fatti più profondi e fondamentali per i nostri studi saranno illustrati in dettaglio quando necessario.

Definizione 3.2. Esiste un insieme numerico $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$, dotato di due operazioni di *somma* $+$ e *prodotto* $\cdot$, i cui elementi possono essere confrontati con la relazione d'ordine *minore o uguale* $\leqslant$, per cui valgono le seguenti proprietà:

Assiomi di campo

(C1) $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (proprietà commutativa);

(C2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa);

(C3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà distributiva);

(C4) esistono due elementi di $\mathbb{R}$, lo *zero* 0 e l'*uno* 1, tali che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ (esistenza degli elementi neutri);

(C5) per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $a' \in \mathbb{R}$ tale che $a + a' = 0$ (esistenza dell'*opposto*);

(C6) per ogni $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, esiste un elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot \overline{a} = 1$ (esistenza dell'*inverso*).

Assiomi di ordinamento

(O1) presi comunque $a, b \in \mathbb{R}$, si può sempre stabilire se $a \leqslant b$ oppure $b \leqslant a$ (totalità dell'ordinamento);

(O2) comunque presi $a, b \in \mathbb{R}$, se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ allora $a = b$ (proprietà antisimmetrica);

(O3) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ allora $a \leqslant c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ (proprietà transitiva);

(O4) se $a \leqslant b$ allora $a + c \leqslant b + c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$;

(O5) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$, allora $0 \leqslant ab$.

Assioma di continuità (o completezza)
Siano dati due sottoinsiemi non vuoti di A e B di $\mathbb{R}$ con la proprietà che $a \leqslant b$, comunque si prendano un elemento $a \in A$ e $b \in B$ (si dice che A e B sono *classi separate*). Allora esiste almeno un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leqslant c \leqslant b$, per ogni $a \in A$ e $b \in B$. Un tale c è detto *elemento separatore* delle classi A e B.

3.3 Proprietà delle operazioni

Illustriamo ora alcune proprietà dei numeri reali (molte delle quali conosciute fin dai primi anni di scuola) che discendono direttamente dagli assiomi di campo che abbiamo assunto nella precedente sezione. Ricordiamo che per comodità di notazione, il prodotto $a \cdot b$ è anche indicato con ab, omettendo così il simbolo della moltiplicazione.

Cominciamo col provare che lo zero e l'uno sono unici in $\mathbb{R}$. Per tale motivo vengono indicati con due simboli ben determinati. Inoltre ogni numero reale ha il suo ben determinato opposto e, se non è nullo, ha anche un unico inverso.

Proposizione 3.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) esiste un solo elemento neutro rispetto all'addizione (indicato con 0*);*

(ii) esiste un solo elemento neutro rispetto alla moltiplicazione (indicato con 1*);*

(iii) per ogni $a \in \mathbb{R}$ *esiste un unico opposto;*

(iv) per ogni $a \in \mathbb{R}$ *non nullo, esiste un unico inverso.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo che ci siano due elementi neutri rispetto all'addizione in $\mathbb{R}$, chiamiamoli 0 e $0'$. Ora, siccome $0'$ è un elemento neutro, possiamo scrivere

$$0 = 0 + 0'.$$

Poiché anche 0 è elemento neutro abbiamo anche che

$$0' = 0' + 0.$$

Dalla commutatività segue che necessariamente

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

(ii) Si prova in maniera del tutto simile a (i), *mutatis mutandis.*
(iii) Supponiamo che il numero reale a abbia i due opposti a' ed a''. Abbiamo allora che $a + a' = 0$ e $a + a'' = 0$. Allora troviamo che

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''.$$

(iv) Si prova in maniera analoga alla (iii). **QED**

La proposizione precedente ci autorizza ad usare i simboli più familiari $-a$ e $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ per indicare rispettivamente l'opposto e l'inverso (se esiste) di $a \in \mathbb{R}$.

È possibile anche definire la differenza tra due numeri reali a e b come la somma di a con l'opposto di b, come segue:

$$a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b).$$

Passiamo ora a dimostrare le seguenti leggi di cancellazione che già durante le scuole medie abbiamo utilizzato nella risoluzione delle equazioni di primo grado.

Proposizione 3.4 (Leggi di cancellazione)**.** *Siano* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Allora*

(i) se $a + b = a + c$, *allora* $b = c$;

(ii) se $a \neq 0$ *e* $ab = ac$, *allora* $b = c$.

Dimostrazione. (i) Sappiamo che $a + b = a + c$. Sommando ad ambo i membri di questa uguaglianza l'opposto di a, e utilizzando la proprietà associativa della somma, abbiamo che

$$-a + (a + b) = -a + (a + c) \quad \Rightarrow \quad (-a + a) + b = (-a + a) + c \quad \Rightarrow \quad 0 + b = 0 + c \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

La (ii) si prova in maniera del tutto analoga. Infatti, se a non è nullo, esiste il suo inverso a^{-1}. Allora moltiplicando a sinistra per a^{-1} entrambi i membri dell'uguaglianza $ab = ac$, si ottiene

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \;\Rightarrow\; (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \;\Rightarrow\; 1 \cdot b = 1 \cdot c \;\Rightarrow\; b = c.$$

La dimostrazione è quindi completa. **QED**

Vediamo alcune proprietà che riguardano la moltiplicazione ed il passaggio all'opposto di un numero.

Proposizione 3.5. *Siano a e b numeri reali. Allora:*

(i) $-(-a) = a$;

(ii) $(-a)b = -(ab)$;

(iii) $(-a)(-b) = ab$.

Dimostrazione. (i) Sappiamo già che $a + (-a) = 0$. Da questa identità leggiamo che a si comporta come l'opposto di $-a$, ovvero $-(-a)$. Dall'unicità dell'opposto segue che necessariamente $a = -(-a)$.
(ii) Sommando $(-a)b$ e ab ed applicando la proprietà associativa, troviamo che

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0 \cdot b = 0.$$

Pertanto leggiamo che $(-a)b$ è l'opposto di ab.
(iii) Sfruttando la (ii) e la (i) abbiamo che

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab.$$

QED

È ora il momento di illustrare una delle proprietà fondamentali dei numeri reali.

Teorema 3.6 (Legge di annullamento del prodotto)**.** *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$*. Allora* $ab = 0$ *se e solo se* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

Dimostrazione. Cominciamo col provare la condizione necessaria, cioè che se in una moltiplicazione un fattore è nullo, allora il prodotto stesso è nullo: $a \cdot 0 = 0$. Abbiamo che

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Cancellando l'addendo $a \cdot 0$ da ambo i membri, abbiamo che $a \cdot 0 = 0$, come volevamo. Vediamo ora il viceversa: se un prodotto è nullo, almeno uno dei fattori deve essere nullo. Supponiamo che $ab = 0$. Se $a = 0$ non c'è nient'altro da dimostrare. Se invece $a \neq 0$, dobbiamo far vedere che $b = 0$ necessariamente. Poiché $a \neq 0$, esiste il suo inverso a^{-1}. Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza $ab = 0$ per a^{-1}, abbiamo che

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad (a^{-1}a)b = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot b = 0,$$

infine $b = 0$. La dimostrazione è così conclusa. **QED**

Esercizio svolto 3.7. Si risolva l'equazione $x^3 - x = 0$ nell'insieme dei numeri reali. Applicando la proprietà associativa, possiamo effettuare la seguente decomposizione:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Eguagliando a zero, abbiamo l'uguaglianza

$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

che e vera se e solo se almeno uno dei fattori è nullo (per ipotesi lavoriamo nel campo reale). Allora abbiamo che $x = 0$ oppure $x = 1$ oppure ancora $x = -1$. Abbiamo così trovato le possibili soluzioni dell'equazione data.

3.4 Proprietà dell'ordinamento naturale

Vale la pena di sottolineare che la relazione minore o uguale è una relazione riflessiva, cioè per ogni $a \in \mathbb{R}$, si ha che $a \leqslant a$. Questo discende infatti dalla totalità dell'ordinamento (assioma (O1)).

È possibile definire a partire dalla relazione $\leqslant$ (minore o uguale) la sua duale $\geqslant$, detta *maggiore o uguale*, definita nel modo seguente:

$$a \geqslant b \quad \Leftrightarrow \quad b \leqslant a,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Si utilizzano spesso anche le relazioni d'ordine stretto $<$ e $>$, dette rispettivamente *minore (stretto)* e *maggiore (stretto)*, definite nel modo seguente:

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant b \text{ e } a \neq b;$$

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant b \text{ e } a \neq b.$$

Analogamente a quanto detto sopra, abbiamo l'equivalenza

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad b > a.$$

Esempio 3.8. Possiamo scrivere che $3 \leqslant 5$ e che $5 \leqslant 5$ ma solo che $3 < 5$ e non che $5 < 5$. Infatti la relazione $<$, come anche la relazione $>$, perde la proprietà riflessiva di cui gode $\leqslant$ e $\geqslant$.

Preso $a \in \mathbb{R}$, a seconda che sia $a > 0$ o $a < 0$, diremo che a è *positivo* o *negativo* rispettivamente. Proviamo ora una semplice equivalenza circa riguarda l'ordinamento che ci tornerà spesso utile in seguito.

Proposizione 3.9. *Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Allora: $a \leqslant b$ se e solo se $b - a \geqslant 0$.*

Dimostrazione. Partiamo dalla diseguaglianza $a \leqslant b$. Sommiamo il numero $-b$ ad entrambi i membri; otteniamo così

$$a - b \leqslant b - b = 0,$$

ovvero $a - b \leqslant 0$. Quest'ultima equivale a $b - a \geqslant 0$. Viceversa, dalla diseguaglianza $b - a \geqslant 0$, sommando a ad ambo i membri, si ottiene che $b \geqslant a$, che equivale a $a \leqslant b$. **QED**

È il momento di dimostrare le seguenti proprietà che costituiscono le regole formali nel calcolo delle disuguaglianze. Avvisiamo che le proposizioni che presentano il $\leqslant$ e $\geqslant$, valgono anche con il $<$ e $>$ rispettivamente.

Proposizione 3.10. *Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *se $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$, allora $0 \leqslant a + b$;*

(ii) *se $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$, allora $a + b \leqslant c + d$;*

(iii) *se $a \geqslant 0$ allora $-a \leqslant 0$;*

(iv) *se* $a \geqslant 0$ *e* $b \leqslant 0$, *allora* $ab \leqslant 0$;

(v) *se* $a \leqslant 0$ *e* $b \leqslant 0$, *allora* $ab \geqslant 0$;

(vi) *se* $a \leqslant b$ *e* $c \geqslant 0$, *allora* $ac \leqslant bc$;

(vii) *se* $a \leqslant b$ *e* $c \leqslant 0$, *allora* $ac \geqslant bc$;

(viii) *se* $a > 0$ *allora* $\dfrac{1}{a} > 0$;

(ix) *se* $a < 0$ *allora* $\dfrac{1}{a} < 0$;

(x) *se* $0 < a \leqslant b$ *allora* $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Dimostrazione. (i) Partiamo dalla diseguaglianza $0 \leqslant a$ e sommiamo b ad entrambi i membri, usando l'assioma (O4). Ne risulta che $b \leqslant a + b$. Poiché è anche $0 \leqslant b$, applicando la proprietà transitiva, deduciamo che $0 \leqslant a + b$.
(ii) Sommiamo c da entrambi i lati alla diseguaglianza $a \leqslant b$ e b alla diseguaglianza $c \leqslant d$. Otteniamo che $a + c \leqslant b + c$ e che $b + c \leqslant b + d$. Per transitività abbiamo che $a + c \leqslant b + d$.
(iii) Sommiamo alla diseguaglianza $a \geqslant 0$, il numero $-a$ su entrambi i lati. Otteniamo che $a - a \leqslant 0 - a$, ovvero $0 \leqslant -a$, che equivale a $-a \leqslant 0$, come volevamo.
(iv) Abbiamo che $a \geqslant 0$ e $-b \geqslant 0$. Allora, grazie l'assioma (O5), abbiamo che $-ab \geqslant 0$, che equivale a dire che $ab \leqslant 0$, usando la proprietà (iii).
(v) Similmente alla precedente, abbiamo che $-a \geqslant 0$ e $-b \geqslant 0$. Usando l'assioma (O5), abbiamo che $(-a)(-b) \geqslant 0$, la quale, ricordando che $(-a)(-b) = ab$, diventa $ab \geqslant 0$.
(vi) Per ipotesi abbiamo che $b - a \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$. Pertanto $(b - a)c \geqslant 0$, da cui $bc - ac \geqslant 0$, che equivale a dire $ac \leqslant bc$.
(vii) Si prova come la (vi), usando $b - a \geqslant 0$ e $-c \geqslant 0$.
(viii) Sia $a > 0$. Se fosse $\dfrac{1}{a} \leqslant 0$, dovrebbe essere $a \cdot \dfrac{1}{a} \leqslant 0$, cioè $1 \leqslant 0$, il che è assurdo. Allora non può che essere $\dfrac{1}{a} > 0$. Allo stesso modo si prova la (ix).
(x) Poiché a e b sono entrambi positivi, allora anche $ab > 0$. Pertanto $\dfrac{1}{ab} > 0$. Moltiplichiamo entrambi i membri della diseguaglianza $a \leqslant b$ per $\dfrac{1}{ab}$. Otteniamo che $\dfrac{a}{ab} \leqslant \dfrac{b}{ab}$, che diventa $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. La dimostrazione della proposizione è così conclusa. **QED**

3.5 Esercizi

Esercizio 3.1. Risolvere le seguenti disequazioni:

(i) $x^4 - 12x^2 + 32 < 0$ $\quad [\,-2\sqrt{2} < x < -2 \ \vee\ 2 < x < 2\sqrt{2}\,]$

(ii) $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} + \dfrac{x + 2}{x + 4} \geqslant \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x}$ $\quad [\,x < -4 \ \vee\ -1 < x < 0 \ \vee\ x > 0\,]$

(iii) $\dfrac{x}{x - 6} < \dfrac{x + 3}{6} + \dfrac{x + 6}{6 - x}$. $\quad [\,-3 < x < 6 \ \vee\ x > 18\,]$

(iv) $\dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{6}{x^4-1} > 1 - \dfrac{3}{x^2+1}$. $\quad [\,-\sqrt{2} < x < -1 \ \vee 1 < x < \sqrt{2}\,]$

Esercizio 3.2. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

(i) $\begin{cases} x^2 - 6x + 12 > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2+1} < 0. \end{cases}$ $\quad [\,0 < x < 1\,]$

(ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{5-x} \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{x-1} > 0. \end{cases}$ $\quad [\,1 < x < 5\,]$