Antonio Cigliola

GEOMETRIA

Capitolo 1

Matrici

In Matematica e nelle scienze applicate si fa ormai da più di un secolo un uso ampio e sistematico delle matrici. Esse permettono infatti di dare una descrizione sintetica e più agevole degli enti matematici e delle loro proprietà.

Siano m ed n due numeri naturali positivi. Una *matrice di tipo* $m \times n$ è una tabella con m righe ed n colonne. Per comodità indicheremo le matrici racchiuse tra parentesi tonde. Ad esempio

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & * & k \end{pmatrix}$$

è una matrice di tipo 2×3, con due righe e tre colonne. Più in generale, una matrice è scritta in maniera estesa come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dove il generico elemento a_{ij} è detto *entrata* o *coefficiente* di posto i, j, intendendo che si trova sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna della matrice A. I pedici i e j sono detti rispettivamente l'*indice di riga* e l'*indice di colonna*; per indicare la loro variabilità, si scrive $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e si legge 'i che varia da 1 ad m e j che varia da 1 ad n'. Si può anche scrivere $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.
In maniera compatta una matrice è indicata con uno dei seguenti simboli:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad\qquad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Nella matrice M considerata sopra abbiamo che

$$a_{11} = \frac{1}{2}, \qquad a_{13} = 0, \qquad a_{22} = *.$$

L'intera riga i-esima di A si indica con

$$R_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

e la colonna j-esima con

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Se non c'è rischio di equivoco, si indicano più brevemente con R_i e C_j. Ad esempio, nella matrice M considerata sopra, si ha $R_1(M) = (\frac{1}{2}, 1, 0)$ e $C_2(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ * \end{pmatrix}$.

Se gli elementi della matrice sono tutti numeri reali, la matrice è detta a coefficienti reali. Indicheremo l'insieme di tutte le matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti reali con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Le matrici dell'insieme $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sono costituiti da una sola riga con n elementi e sono dette *vettori riga*. Le matrici invece di $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ sono costituiti da una sola colonna con m elementi e sono dette *vettori colonna*.

La matrice di tipo $m \times n$ che ha tutti gli elementi uguali a 0 è detta *matrice nulla* e la si indica con $\mathbf{0}_{m,n}$.

Quando una matrice ha lo stesso numero di righe e di colonne uguale ad n è detta *matrice quadrata di ordine n*. Per convenzione l'insieme $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è indicato più brevemente con $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & \frac{2}{3} \\ \pi & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è quadrata di ordine 3. Le matrici quadrate di ordine 1 sono essenzialmente i numeri reali stessi. La matrice quadrata nulla di ordine n sarà indicata con $\mathbf{0}_n$.

Presa una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sono detti *elementi diagonali* di A e si dice che costituiscono la *diagonale* di A. La matrice A è detta poi *matrice diagonale* se tutti i suoi elementi fuori della diagonale sono nulli, ovvero se si ha $a_{ij} = 0$, per ogni $i \neq j$.

Esempio 1.1. La matrice nulla di ordine n è una matrice diagonale. Le matrici quadrate di ordine 1 (i numeri reali per dirla in breve) sono matrici diagonali. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è diagonale di ordine 3.

Chiameremo *matrice identica di ordine n* la matrice diagonale di ordine n che ha tutti 1 sulla diagonale:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n è detta triangolare superiore se tutti gli elementi posti al di sotto della diagonale principale sono nulli, ovvero se $a_{ij} = 0$, per ogni $1 \leqslant j < i \leqslant n$. La matrice A è invece detta triangolare inferiore se tutti gli elementi posti al di sopra della diagonale principale sono nulli, ovvero se $a_{ij} = 0$, per ogni $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore; la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ è triangolare inferiore. Le matrici diagonali sono sia triangolari superiori che inferiori.

Principio di identità fra matrici. Conveniamo che due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ dello stesso tipo $m \times n$ sono uguali se hanno ordinatamente uguali le entrate omologhe, ovvero se per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha che $a_{ij} = b_{ij}$.
Ad esempio le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ non sono uguali poiché hanno i coefficienti di posto 2-1 diversi.

Definizione 1.2. Presa una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si definisce *matrice trasposta* di A la matrice A^T di tipo $n \times m$ che ha per righe ordinatamente le colonne di A e per colonne ordinatamente le righe di A. Più precisamente, se $A = (a_{ij})$ allora $A^T = (a_{ji})$, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Esempio 1.3. La trasposta della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ è $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La trasposta della matrice nulla $\mathbf{0}_{m,n}$ è la matrice nulla $\mathbf{0}_{n,m}$. La matrice nulla $\mathbf{0}_n$ coincide con la sua trasposta. La stessa cosa accade alla matrice identica I_n. Anche la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ ha per trasposta sé stessa. Si osservi infine che la trasposta di una matrice triangolare superiore è una matrice triangolare inferiore e viceversa.

1.1 Operazioni tra matrici

Presentiamo ora una serie di operazioni che è possibile effettuare con le matrici.

Definizione 1.4. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti reali. La somma di A e B è la matrice $A + B$ di tipo $m \times n$ che ha per elementi ordinatamente la somma degli elementi omologhi di A e di B:

$$A + B = (c_{ij}) \qquad \text{dove } c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m \ \text{ e } \ j = 1, \ldots, n.$$

Esempio 1.5. La somma delle matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

La somma tra matrici gode delle analoghe proprietà che sono vere per la somma tra numeri reali. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.6. *Siano $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora:*

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(proprietà associativa della somma)*

(ii) $A + \boldsymbol{0}_{m,n} = \boldsymbol{0}_{m,n} + A = A$ *(la matrice nulla è l'elemento neutro rispetto alla somma)*

(iii) *esiste una matrice* $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *tale che* $A + (-A) = -A + A = \boldsymbol{0}_{m,n}$ *(esistenza del simmetrico)*

(iv) $A + B = B + A$ *(proprietà commutativa della somma)*

Dimostrazione. Cominciamo col provare per comodità la (iv). Siano $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Per definizione, l'elemento di $A + B$ di posto i, j è dato da $a_{ij} + b_{ij}$. Similmente, l'elemento di $B + A$ di posto i, j è dato da $b_{ij} + a_{ij}$. Poiché la somma tra numeri reali è commutativa, si ha che $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. Siccome le uguaglianze sono vere per tutti gli indici i e j, le matrici $A + B$ e $B + A$ hanno esattamente gli stessi elementi. Possiamo concludere che $A + B = B + A$. In maniera del tutto simile, a partire dall'associatività della somma tra numeri reali si deduce l'associatività della somma tra matrici. Quindi anche la (i) è vera. La (ii) è banale. Per provare la (iii), si consideri la matrice $-A$ così definita:

$$-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}},$$

i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti coefficienti della matrice A. È facile allora convincersi che vale anche la (ii). **QED**

Per come è definita, la matrice $-A$ è detta l'*opposta* di A, sempre per analogia con i numeri. Grazie alla matrice opposta si può definire l'operazione di *sottrazione* tra due matrici sommando alla prima, l'opposta della seconda:

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B).$$

Passiamo ora a definire un altro tipo di operazione, il prodotto esterno che ci permette di moltiplicare un numero reale, che chiameremo *scalare*, per una matrice.

Definizione 1.7. Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiamo la matrice prodotto λA come la matrice che ha per elementi ordinatamente gli elementi di A moltiplicati per λ, ovvero

$$\lambda A = (c_{ij}) \qquad \text{dove } c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda a_{ij}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Esempio 1.8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & 8 \end{pmatrix}$. Inoltre, la matrice $-1 \cdot A$ coincide con la matrice opposta $-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & -4 \end{pmatrix}$. Ad ultimo, si ha facilmente che $0 \cdot A = \mathbf{0}_{2,3}$.

Valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 1.9. *Siano* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Allora si ha:*

(i) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ *(proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma tra matrici)*

(ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ *(proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma tra scalari)*

(iii) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ *(proprietà associativa mista)*

(iv) $1\cdot A=A$.

Dimostrazione. La dimostrazione è piuttosto facile. Proviamo solo la (i) per dare un'idea di come fare il resto. Siano $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ e $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Allora $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Quindi per definizione, $\lambda(A+B)=(\lambda(a_{ij}+b_{ij}))_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$. D'altro canto, $\lambda A+\lambda B=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}+(\lambda b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}=(\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Siccome in $\mathbb{R}$ vale la distributività della moltiplicazione rispetto alla somma, per ogni indice i e j si ha che $\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$. Possiamo concludere che le matrici $\lambda(A+B)$ e $\lambda A+\lambda B$ hanno ordinatamente gli stessi elementi, allora coincidono. **QED**

Esercizio svolto 1.10. Sono date le matrici $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Calcolare $A+3B-(2A+\mathbf{0}_2+4B)$.
Grazie alle proprietà che abbiamo introdotto fin qui, è più conveniente effettuare delle semplificazioni prima di passare al calcolo esplicito. Si ha:

$$A+3B-(2A+\mathbf{0}_2+4B)=A+3B-(2A+4B)=A+3B-2A-4B=A-2A+3B-4B=$$
$$=-A-B=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

Proviamo che la trasposizione delle matrici rispetta le operazioni tra matrici che abbiamo introdotto.

Proposizione 1.11. *Siano* $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Allora*

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(ii) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$

(iii) $\left(A^T\right)^T=A$

Dimostrazione. Vediamo prima la (i). Il generico elemento di posto i,j della matrice $(A+B)^T$ è l'elemento di posto j,i della matrice $A+B$. Questo è a sua volta somma dell'elemento di posto j,i di A e dell'elemento di posto j,i di B. A ben vedere, abbiamo ottenuto la somma dell'elemento di posto i,j della matrice A^T e dell'elemento di posto i,j di B^T. Allo stesso modo si prova la (ii). La (iii) è banale. **QED**

1.2 Matrici simmetriche e antisimmetriche

Analizziamo più da vicino due classi particolari di matrici quadrate: quelle simmetriche e quelle antisimmetriche.

Definizione 1.12. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diremo che A è *simmetrica* se $A^T = A$, diremo invece che A è *antisimmetrica* se $A^T = -A$.

Esempio 1.13. La matrice identica I_n e la matrice nulla $\mathbf{0}_n$ sono matrici simmetriche. La matrice nulla è anche antisimmetrica. La matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è invece antisimmetrica. Si badi che esistono matrici quadrate che non sono né simmetriche né antisimmetriche come ad esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Infatti si ha che $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, che non coincide né con A né con la sua opposta.

Per riconoscere più facilmente se una matrice è simmetrica o antisimmetrica torna utile il seguente criterio.

Proposizione 1.14. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora si ha che*

(i) A è simmetrica se e solo se $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$;

(ii) A è antisimmetrica se e solo se $a_{ij} = -a_{ji}$, per ogni $i \neq j$, e gli elementi posti sulla diagonale di A sono tutti nulli.

Dimostrazione. La (i) segue immediatamente eguagliando elemento per elemento ordinatamente la matrice A e la sua trasposta. Passiamo alla (ii). La prima parte (cioè quando $i \neq j$) la si ottiene procedendo similmente a quanto detto sopra. Quando invece $i = j$, ci troviamo sulla diagonale di A. Allora, dalla definizione di matrice antisimmetrica: $A^T = -A^T$, segue che $a_{ii} = -a_{ii}$. Poiché l'unico numero reale che coincide col suo opposto è 0, ne segue necessariamente che $a_{ii} = 0$. **QED**

In breve, possiamo dire che una matrice quadrata è simmetrica se gli elementi posti simmetricamente rispetto alla diagonale di A coincidono; una matrice è invece antisimmetrica se gli elementi posti simmetricamente rispetto alla diagonale di A sono l'uno l'opposto dell'altro e quelli invece posti sulla diagonale sono nulli.

Passiamo ad analizzare ora alcune proprietà delle matrici simmetriche ed antisimmetriche.

Proposizione 1.15. *Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora*

(i) Se A e B sono entrambe simmetriche (antisimmetriche), anche $A + B$ è simmetrica (risp. antisimmetrica).

(ii) Se A è simmetrica (antisimmetrica), anche λA è simmetrica (antisimmetrica).

(iii) Se A è sia simmetrica che antisimmetrica, allora A è la matrice nulla.

Dimostrazione. (i) Siano A e B matrici simmetriche. Allora $A^T = A$ e $B^T = B$. Vogliamo provare che anche $(A+B)^T = A+B$. Usando la Proposizione 1.11, si ottiene che $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$. Lo stesso per la (ii). Se A è sia simmetrica che antisimmetrica, deve essere $A^T = A = -A$, equivalentemente $2A = \mathbf{0}$, da cui discende, dividendo per 2, che $A = \mathbf{0}$. **QED**

Proviamo ora un'importante proprietà delle matrici simmetriche e antisimmetriche.

Teorema 1.16 (Decomposizione unica in parte simmetrica e antisimmetrica)**.** *Sia $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora esistono e sono uniche le matrici S simmetrica ed A antisimmetrica tali che $M = S + A$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$S \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(M + M^T) \qquad\qquad A \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(M - M^T).$$

È facile verificare che $S + A = M$. Inoltre S è simmetrica. Si ha infatti che $S^T = \left[\frac{1}{2}(M + M^T)\right]^T = \frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}\left[M^T + (M^T)^T\right] = \frac{1}{2}(M + M^T) = S$. Analogamente si ha che A è antisimmetrica. Inoltre, se fosse $M = S' + A'$, con S' simmetrica ed A' antisimmetrica, avremmo $S+A = S'+A'$. Di qui avremmo $S-S' = A'-A$. Ora, essendo sia S che S' simmetriche, anche $S - S'$ è simmetrica. Inoltre $A' - A$ è antisimmetrica, ma l'unica matrice sia simmetrica che antisimmetrica è quella nulla. Ne segue che $S - S' = A' - A = \mathbf{0}$, ovvero che $S = S'$ e $A = A'$, da cui concludiamo l'unicità della decomposizione cercata. **QED**

La matrice S e la matrice A del teorema precedente sono rispettivamente dette la *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* di M.

Esercizio svolto 1.17. Decomporre come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica le seguenti: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Poiché la matrice M è simmetrica, ovviamente coincide con la sua parte simmetrica. Ne resta che la parte antisimmetrica di M è nulla. Per quanto riguarda N, procediamo come nella dimostrazione del Teorema 1.16. Basta allora prendere

$$S = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = N - S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Prodotto riga per colonna

Introduciamo ora un'operazione di moltiplicazione tra matrici.

Definizione 1.18. Siano $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vettore riga e un vettore colonna. Definiamo *prodotto riga per colonna* della riga A per la colonna B la matrice quadrata di ordine 1 (ovvero il numero reale) ottenuto come

$$AB = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Esempio 1.19. Presa $A = (1, 2, -3)$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si ha che $AB = 1 - 2 + 3 = 2$. Se si prende $A' = (0, 0, 0)$, si ha poi $A'B = 0$.

Definizione 1.20. Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Definiamo $C = AB$, la matrice *prodotto riga per colonna* di A e B, come la matrice di tipo $m \times p$ il cui generico elemento c_{ij} è il prodotto riga per colonna della riga i-esima di A per la colonna j-sima di B:

$$C = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad \text{con} \qquad c_{ij} \overset{\text{def}}{=} R_i(A) C_j(B) = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}.$$

Per brevità spesso diremo *prodotto tra matrici* intendendo che stiamo effettuando il prodotto riga per colonna. Si badi bene che è possibile effettuare questo tipo di prodotto solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda!

Esempio 1.21. Calcoliamo il prodotto $C = AB$ tra le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice C sarà di tipo 2×3. Calcoliamo i suoi elementi.

$$c_{11} = R_1(A) C_1(B) = (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 5$$

$$c_{12} = R_1(A) C_2(B) = (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (1) = 1$$

$$c_{13} = R_1(A) C_3(B) = (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -1$$

$$c_{21} = R_2(A) C_1(B) = (1, -1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$c_{22} = R_2(A) C_2(B) = (1, -1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (1) = 0$$

$$c_{23} = R_2(A) C_3(B) = (1, -1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0.$$

La matrice prodotto è dunque $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il prodotto riga per colonna tra matrici gode delle seguenti proprietà, analoghe a quelle delle operazioni tra numeri reali.

Proposizione 1.22. *Siano A, B, C matrici di dimensioni opportune. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $(AB)C = A(BC)$ *(proprietà associativa)*

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ *(distributività del prodotto rispetto alla somma a destra)*

(iii) $(B + C)A = BA + CA$ *(distributività del prodotto rispetto alla somma a sinistra)*

(iv) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ *(proprietà associativa mista)*

(v) se A è di tipo $m \times n$, allora $A\,\mathbf{0}_{n,p} = \mathbf{0}_{m,p}$ e $\mathbf{0}_{q,m}\,A = \mathbf{0}_{q,n}$

(vi) se A è di tipo $m \times n$, allora $A\,I_n = A$ e $I_m\,A = A$.

Tralasciamo la dimostrazione che è poco più che un esercizio di calcolo. Piuttosto poniamo attenzione sulle proprietà di cui *non* gode la moltiplicazione tra matrici.

Osservazione 1.23. Il prodotto riga per colonna non è in generale commutativo, potrebbe non avere affatto senso moltiplicare le matrici in ordine scambiato, se le loro dimensioni non sono compatibili. Più concretamente, se moltiplichiamo una matrice A di tipo 2×3 per una matrice B di tipo 3×4, il prodotto AB può essere calcolato, quello BA è privo di significato. Ma anche se fosse possibile eseguire il prodotto nell'ordine scambiato, i prodotti risultanti potrebbero non essere matrici dello stesso tipo. Ad esempio, data A una matrice d tipo 2×3 e B una matrice di tipo 3×2, si ha che AB è quadrata di ordine 2 e che BA è quadrata di ordine 3. Non ha senso chiedersi allora se $AB = BA$. Resta ad ultimo il caso del prodotto di matrici quadrate dello stesso ordine. Bene, anche in questo caso, la commutatività del prodotto non vale in generale. Ad esempio, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Per curiosità enunciamo, senza dimostrare, il seguente risultato.

Proposizione 1.24. *Le matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che commutano nella moltiplicazione con tutte le altre matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sono le matrici* scalari*, ovvero le matrici diagonali di tipo $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Quando si moltiplica una matrice quadrata A per sé stessa, si utilizza la familiare notazione potenza. Si pone infatti $AA = A^2$, $AAA = A^3$ etc. Per comodità si pone $A^0 = I_n$.

Dimostriamo la seguente utile relazione tra prodotto riga per colonna e trasposizione di matrici.

Proposizione 1.25. *Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Allora $(AB)^T = B^T A^T$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la matrice $(AB)^T$ è di tipo $p \times m$. Le matrici A^T e B^T sono rispettivamente di tipo $n \times m$ e $p \times n$. Sicché il prodotto $B^T A^T$ è di tipo $p \times m$. Quindi l'asserto ha senso. Proviamolo. L'elemento di posto i, j della matrice $(AB)^T$ è l'elemento di posto j, i della matrice AB. Questo è per definizione il prodotto della riga j-esima di A per la colonna i-esima di B. Si ottiene allora $a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$. Dall'altro lato, l'elemento di posto i, j della matrice $B^T A^T$ è dato dal prodotto della riga i-esima di B^T per la colonna j-esima di A^T, cioè dal prodotto della colonna i-esima di B per la riga j-esima di A. Si ottiene dunque $b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn}$, che è a ben vedere la stessa quantità trovata sopra. Poiché le due matrici hanno ordinatamente le stesse entrate, sono uguali. **QED**

Esercizio svolto 1.26. Sia A una matrice quadrata. Dimostrare che la matrice AA^T è una matrice simmetrica.
Si tratta di provare che $(AA^T)^T = AA^T$. Sfruttando la Proposizione 1.25 abbiamo facilmente che $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

Esercizio svolto 1.27. Sia $n \geqslant 1$ un numero naturale e sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare per induzione che vale la formula $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1} + \cdots + a + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La base dell'induzione è $n = 1$. Dal lato sinistro troviamo che $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dal lato destro che $\begin{pmatrix} a^1 & a^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi la formula è verificata. Procediamo col passo induttivo. Supponiamo che la tesi sia vera per n, facciamo vedere che vale anche per $n + 1$. Dobbiamo dimostrare che $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + \cdots + a + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sfruttando l'ipotesi induttiva si ha che $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1} + \cdots + a + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La dimostrazione è allora conclusa.

Esercizio svolto 1.28. Determinare tutte le matrici quadrate di ordine 2 che commutano rispetto al prodotto con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sia $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Deve essere $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Svolgendo i calcoli si trova l'uguaglianza $\begin{pmatrix} x & 2x + y \\ z & 2z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ z & t \end{pmatrix}$. Eguagliando termine a termine si ha che $x = x + 2z$, $2x + y = y + 2t$, $z = z$, e $2z + t = t$. Dalla prima equazione abbiamo che $z = 0$, dalla seconda che $t = x$. Su y non abbiamo condizioni significative, quindi resta un parametro libero come x. Allora le matrici che commutano con A rispetto al prodotto sono quelle della forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, al variare di x ed y tra i numeri reali.