Antonio Cigliola

Note di

LOGICA e INSIEMISTICA

1 Logica elementare

In questa prima parte introduttiva ci occuperemo di illustrare gli strumenti che servono in Matematica per formulare correttamente ed in maniera universalmente condivisa i risultati. Stabiliremo qui le *regole del gioco* per enunciare coerentemente definizioni e teoremi, capiremo come dimostrare correttamente la validità di una proprietà e, cosa molto importante, impareremo a verificare in maniera giusta e convincente che alcune asserzioni sono false.

1.1 Grammatica e Matematica

Come ogni disciplina scientifica, anche la Matematica ha bisogno di un *linguaggio* ed ha pertanto bisogno di una grammatica che ne regoli la corretta costruzione di parole e frasi. Presentiamone brevemente i suoi elementi ed il suo funzionamento. Ogni linguaggio ha bisogno di un *alfabeto* specifico fatto dei simboli usati per costruire parole e frasi e di una *sintassi* che studia le relazioni tra i vari periodi dal punto di vista formale. Poiché il linguaggio comune è spesso involuto ed ambiguo per le nostre necessità, nelle scienze viene usato un linguaggio univoco ed universalmente accettato: il *linguaggio formale*. L'alfabeto matematico è l'insieme di tutti i simboli matematici, alcuni dei quali sono ben noti, ad esempio: '1', '+', 'log', '(', '∞', ed altri che impareremo ad utilizzare in seguito come '$\exists$', '$\vee$', '$\cap$', '$\varnothing$'. La Logica, infine, rappresenta la sintassi della Matematica. Essa stabilisce se una proposizione è sintatticamente *ben formata* e se può quindi far parte del discorso matematico. Possiamo quindi dare la seguente:

Definizione 1.1. Una *proposizione* in Matematica è una affermazione di cui si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa.

Ad esempio sono proposizioni: '2 è un numero primo', 'Non esistono malfattori sulla Terra', 'Se piove mi bagno'. Non sono invece proposizioni matematiche frasi del tipo: 'Quali sono le province del Lazio?', o 'Che bella la luna stasera!' oppure ancora 'Il Monte Bianco è molto alto'.

1.2 Concetti primitivi ed Assiomi

Ma cos'è il vero? Cosa il falso? In breve: non ci preoccuperemo di dare una risposta a questa domanda, lasciamo che se ne occupino i filosofi. Si darà infatti per buono il concetto della verità, diremo che esso è un *concetto primitivo*. Ogni discorso scientifico necessita di un punto iniziale a partire dal quale costruire tutto il resto. Servono quindi dei minimi termini intuitivi, facilmente comprensibili da chiunque e che non necessitano di ulteriori esemplificazioni. Ne sono esempio il vero, l'insieme vuoto, il numero zero, i punti e le rette del piano e dello spazio.

Questi oggetti indefinibili, ma facilmente comprensibili, godono di proprietà elementari, gli *assiomi* o *postulati*, che non possono essere provate e vengono date per buone. Si pensi ad esempio ai celebri postulati di Euclide necessari per fondare la

Geometria piana o agli assiomi di Peano che presenteremo in chiusura del capitolo per costruire l'insieme dei numeri naturali.

1.3 Calcolo proposizionale

Come si fa nella grammatica dei linguaggi comuni, ci proponiamo di imparare a costruire grazie alla Logica delle frasi più complesse a partire da altre proposizioni. Procederemo come in Aritmetica, quando si sommano o si moltiplicano due numeri per ottenerne un terzo. D'ora in poi useremo, come di consueto, **V** per distinguere le proposizioni vere da quelle false, indicate con **F**. Useremo infine le lettere p, q, r, $\ldots$, I, T per le proposizioni. Servendosi delle congiunzioni e delle preposizioni di uso comune è possibile costruire tipi diversi di periodi complessi che non utilizzeremo in Matematica. I soli *connettivi logici* che considereremo sono la negazione, la congiunzione, la disgiunzione ed il periodo ipotetico. Vediamo come funzionano.

Definizione 1.2. Siano p e q proposizioni. Allora

(i) $\overline{p}$, la negazione di p, è falsa se p è vera mentre è vera quando p è falsa.

(ii) $p \wedge q$, la congiunzione di p e q, produce una proposizione che è vera se e solo se sia p che q sono vere.

(iii) $p \vee q$, la disgiunzione di p e q, produce una proposizione che è falsa se e solo se sia p che q sono false.

(iv) $p \Rightarrow q$, se p allora q, produce una proposizione che è falsa se e solo se p è vera mentre q è falsa.

(v) $p \Leftrightarrow q$, p equivale a q, si ha quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Esempio 1.3. La frase '3 *non* è un numero dispari' è falsa; 'Tutti i rettangoli sono quadrati *o* $\pi < 3$' è anch'essa falsa; '*Se* $2 < 5$ *allora* il Sole è una stella' è invece vera; infine 'I quadrati sono rombi *e* Colombo scoprì l'America nel 1492' è anch'essa vera. Esempi di equivalenze sono 'Gauss era un matematico *se e solo se* i pentagoni hanno 5 lati' ed 'Un numero intero è pari *se e solo se* il suo successivo è dispari'.

Quando si ha una implicazione

$$p \Rightarrow q$$

si è soliti dire che

$$p \quad \text{è } \textit{condizione sufficiente} \text{ per} \quad q$$

e che

$$q \quad \text{è } \textit{condizione necessaria} \text{ per} \quad p.$$

Quando si ha l'equivalenza

$$p \Leftrightarrow q$$

si è soliti dire che

$$q \quad \text{è condizione necessaria e sufficiente per} \quad p.$$

Facciamo qualche esempio. Vale l'enunciato 'Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un rombo è che sia un quadrato'. Ciò è vero perché tutti i quadrati sono dei rombi. Osserviamo che se una condizione è necessaria, non è affatto detto che sia anche sufficiente. Ad esempio, non tutti i rombi sono dei quadrati. Nelle prossime pagine impareremo a trattare con cautela le implicazioni tra proposizioni. Una celebre condizione che è sia necessaria che sufficiente è stabilita dal Teorema di Pitagora: 'Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia rettangolo è che il quadrato costruito sull'ipotenusa sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti'.

È bene sottolineare che quando si formula una frase del discorso matematico usando il linguaggio comune, bisogna fare attenzione a tradurlo utilizzando solo i connettivi logici che abbiamo presentato. Ad esempio 'Il triangolo ABC è isoscele *poiché* è equilatero' andrebbe riscritta come 'Se il triangolo ABC è equilatero, allora è isoscele' e la frase 'Il numero 10 è multiplo di 5 *ma* non di 3' diventa 'Il numero 10 è multiplo di 5 e non di 3'.

1.4 Tabelle di verità

Per capire meglio il funzionamento dei connettivi logici, si utilizzano le *tabelle di verità*. Esse servono a calcolare in maniera più immediata il valore di verità di una proposizione composta in base a quello delle componenti. La seguente tabella riassume il comportamento dei connettivi introdotti nella Definizione 1.2.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Le tabelle di verità sono particolarmente utili quando vogliamo stabilire che due espressioni sono logicamente equivalenti. Questo accade se esse assumono gli stessi valori di verità indipendentemente da quello delle componenti. Facciamo qui due importantissimi esempi, le leggi di De Morgan.

Teorema 1.4. Siano p e q proposizioni. Allora

(i) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (prima legge di De Morgan);

(ii) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (seconda legge di De Morgan).

Dimostrazione. Basta usare le tavole di verità:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Dall'uguaglianza delle colonne corrispondenti segue la tesi. **QED**

Applichiamo a degli esempi queste leggi. Dire ad esempio 'Non è vero che il Sole brilla e che Parigi non è in Italia' equivale a dire che 'O il Sole non brilla oppure Parigi è in Italia'. Inoltre 'Non si dà il caso che 5 è minore o uguale a 4' è lo stesso che dire '5 non è minore di 4 e non è nemmeno uguale a 4'.

Diremo che una proposizione è una *tautologia* se essa è sempre vera indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti. Una *contraddizione* invece è una proposizione sempre falsa. Nel successivo Teorema 1.5 vedremo due classici esempi di tautologie e contraddizioni: il principio di non contraddizione e del terzo escluso.

Seguendo l'idea della dimostrazione contenuta nella Proposizione 1.4 è possibile provare la seguente

Proposizione 1.5. *Siano p, q ed r proposizioni. Allora:*

(i) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(la doppia negazione afferma);*

(ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ *e* $p \vee p \Leftrightarrow p$ *(leggi di idempotenza);*

(iii) $p \vee \overline{p}$ *è una tautologia (principio del terzo escluso);*

(iv) $p \wedge \overline{p}$ *è una contraddizione (principio di non contraddizione);*

(v) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *e* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(proprietà commutativa);*

(vi) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ *(prima legge delle inverse);*

(vii) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *è una tautologia (proprietà transitiva).*

Esercizio 1.1. Dimostrare il Teorema 1.5 utilizzando le tabelle di verità.

Più che svolgere l'esercizio precedente, il che si fa in maniera meccanica, ci sembra utile dare alcuni esempi per le proprietà elencate. Ad esempio, usando la doppia negazione, 'Non è vero che il ghiaccio non fonde a $0C$' è lo stesso che dire 'Il ghiaccio fonde a $0C$'. Le leggi di idempotenza in breve stabiliscono che non è necessario ripetere la stessa cosa due o più volte: non si direbbe nulla di nuovo. Il principio del terzo escluso stabilisce che data una proposizione qualsiasi, questa è vera oppure lo è la sua negazione. Praticamente è come dire che ogni proposizione matematica o è vera o è falsa: *tertium non datur*. Sulla stessa linea il principio di non contraddizione dice che non possono mai essere vere sia una proposizione che la sua negazione. Ad esempio, per il principio del terzo escluso, il numero 3 o è pari o è dispari. Per il principio di non contraddizione il numero 3 non può essere pari e dispari contemporaneamente. La proprietà commutativa è abbastanza chiara. Proprio come per i numeri, non importa in che ordine si congiungono o si disgiungono due proposizioni. Ad esempio 'L'acqua è inodore ed è incolore' asserisce lo stesso che 'L'acqua è incolore ed inodore'. Come esempio della proprietà transitiva si pensi ad esempio a 'Se ogni cittadino romano è italiano ed ogni cittadino italiano è europeo, allora ogni cittadino romano è europeo'. Veniamo ora alla prima legge delle inverse, delicata ed importantissima. Essa stabilisce che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è equivalente all'implicazione $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, che è detta la *contronominale* di $p \Rightarrow q$. Consideriamo l'asserto 'Se un animale è un gatto, allora è un mammifero'. Questa equivale a dire che 'Se un animale non è un mammifero, allora non può essere nemmeno un gatto'. Si osservi che, in generale, data l'implicazione $p \Rightarrow q$, non si può dedurre nient'altro se non la sua contronominale. Ad esempio non è detto che valga $q \Rightarrow p$: se un animale è un mammifero, non è necessariamente un gatto, potrebbe infatti anche essere un cavallo.

1.5 Tecniche dimostrative

Quanto studiato sopra ci servirà ora per presentare le tecniche dimostrative che comunemente vengono usate in Matematica per provare teoremi ed asserzioni varie. Qui illustreremo la dimostrazione diretta, la prima legge delle inverse e la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo di voler dimostrare che una certa ipotesi I implica una tesi T. La *dimostrazione per via diretta* prevede di partire dall'asserzione I e di raggiungere la tesi T per mezzo di un numero finito di implicazioni successive logicamente accettabili. Lo schema dimostrativo è:

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T,$$

dove $p_1, \ldots, p_n$ sono proposizioni intermedie. La sua validità è garantita dalla proprietà transitiva dell'implicazione, vedi punto (vii), Proposizione 1.5. Prima di fare un esempio di una dimostrazione in cui è applicata questa tecnica, facciamo alcuni brevi richiami. Ricordiamo che un numero intero n si dice *pari* se esso è divisibile per 2, cioè esso può essere scritto come $n = 2h$, con h anch'esso intero. Un numero m invece si dice *dispari* quando non è divisibile per due. Nel paragrafo dedicato ai numeri interi proveremo che un numero dispari ha la forma $m = 2k + 1$, per qualche altro numero intero k. Èchiaro che un numero intero o è pari o è dispari: non ci sono altre possibilità. Infine, dati due numeri interi n ed m, diciamo che n è multiplo di m se possiamo scrivere n come prodotto di m per un altro numero intero t: $n = mt$. In tal caso si dice anche che n è *divisibile* per m. Proviamo il seguente risultato utilizzando la dimostrazione per via diretta.

Teorema 1.6. Sia n un numero intero. Se n è dispari, allora anche n^2 è dispari.

Dimostrazione diretta. Partiamo dall'ipotesi che n sia un numero dispari. Vogliamo provare che n^2 è anch'esso dispari. Siccome n è dispari, allora possiamo scrivere $n = 2k + 1$, con k numero intero. Allora $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Se poniamo $k' = 2k^2 + 2k$, allora $n^2 = 2k' + 1$. Ne segue che anche n^2 è un numero dispari. **QED**

La *prima legge delle inverse* suggerisce di dimostrare l'implicazione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta la *contronominale* di $I \Rightarrow T$, poiché per il punto (vi), Proposizione 1.5, esse sono equivalenti. Quindi se è vera una, è vera anche l'altra. Si parte in pratica dalla negazione della tesi e per mezzo di passaggi logici si raggiunge la negazione dell'ipotesi. Applichiamo questo metodo nel provare il seguente risultato.

Teorema 1.7. Sia n un numero intero. Se n non è multiplo di 3, allora n non è multiplo di 6.

Dimostrazione della contronominale. Partiamo dal supporre che sia vera la negazione della tesi, cioè che n è multiplo di 6. Dobbiamo far vedere che ne discende la negazione dell'ipotesi e quindi che n è anche multiplo di 3. Ora se $n = 6t$, per qualche intero t, allora $n = 3 \cdot 2t$, come volevamo dimostrare. **QED**

Una tecnica molto simile - si badi a non confonderle! - è la celebre *dimostrazione per assurdo*. Si parte dal fatto che sia vera la negazione della tesi $\overline{T}$ assieme all'ipotesi I. Il nostro compito diventa dunque raggiungere una contraddizione C, un asserto che è evidentemente falso e che non può essere tollerato facendo Matematica. Infatti, definendo l'implicazione logica, abbiamo detto che delle ipotesi vere non possono mai implicare il falso. Lo schema dimostrativo è:

$$[(I \ \wedge \ \overline{T}) \Rightarrow C] \Rightarrow T.$$

Facciamo qualche esempio.

Teorema 1.8. Sia n un numero intero. Se n^2 è dispari, allora anche n è dispari.

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo vera l'ipotesi e che la tesi sia falsa. Quindi n^2 è dispari e, per assurdo, n è pari. Allora $n = 2h$, per qualche h intero. Sicché $n^2 = 4h^2 = 2(2h^2)$ è pari anch'esso. Riassumendo n^2 è sia pari che dispari. Poiché questa è una contraddizione, la tesi deve necessariamente essere vera. **QED**

Per maggior chiarezza facciamo un altro esempio di dimostrazione in cui si applica la *reductio ad absurdum*. Dobbiamo richiamare prima alcune nozioni di geometria piana. Ricordiamo che due rette nel piano si dicono parallele se esse non hanno alcun punto in comune o, come si suol dire, esse non si incontrano mai. Il V postulato di Euclide per la geometria piana asserisce che se dati un punto P ed una retta r nel piano che non passa per P, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela alla retta r. Applicando la dimostrazione per assurdo proveremo la proprietà transitiva del parallelismo.

Teorema 1.9. Siano date r, s e t tre rette nel piano. Supponiamo che r è parallela a t e che anche t è parallela a s. Allora r ed s sono parallele.

Dimostrazione per assurdo. Assieme all'ipotesi che r ed s sono entrambe parallele a t, supponiamo per assurdo che r ed s non siano parallele tra loro. Ciò significa che le rette r ed s si incontrano in almeno un punto, chiamiamolo P. Siccome t è parallela ad r, t non può contenere il punto P. Riassumendo, abbiamo trovato che la retta r passa per P ed è parallela a t. Similmente anche s passa per P ed è parallela a t. Questo contraddice il V postulato, poiché abbiamo trovato due rette distinte r ed s parallele a t e passanti per P. **QED**

Dall'unione dei Teoremi 1.6 e 1.8 segue la seguente equivalenza:

Teorema 1.10. Sia n un numero intero. Allora n è dispari se e solo se n^2 è dispari.

Lo stesso risultato può essere riformulato anche come 'Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia dispari è che il suo quadrato sia dispari'.

Quando abbiamo una equivalenza $p \Leftrightarrow q$, è facile provare che vale anche $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$. Ad esempio possiamo dire che 'Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia pari è che il suo quadrato sia pari'.

Riprendiamo ora a dire quanto abbiamo accennato sopra. Bisogna fare attenzione a maneggiare ed invertire con cautela le implicazioni logiche. Dato un teorema $I \Rightarrow T$, l'unica implicazione che è automaticamente vera è il *teorema contronominale o contrapposto* $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$. Nulla si può dire a priori della verità del *teorema inverso o reciproco* $T \Rightarrow I$. Se è vero va dimostrato separatamente: non si può farlo discendere da $I \Rightarrow T$ immediatamente. Lo stesso vale per il *teorema contrario* $\overline{I} \Rightarrow \overline{T}$. Facciamo qualche esempio per chiarire quanto detto. Èben noto che vale l'implicazione 'Se un poligono è un quadrato, allora è un poligono regolare'. Il teorema inverso stabilisce che 'Se un poligono è regolare, allora esso è un quadrato'. Questo ovviamente è falso in generale. I triangoli equilateri ad esempio, non sono dei quadrati, ma sono comunque dei poligoni regolari con tre lati. Il teorema contrario invece asserisce che 'Se un poligono non è un quadrato, allora non è un poligono regolare'. Anche questa asserzione è falsa: esistono i pentagoni regolari che non sono quadrati tuttavia sono dei poligoni regolari. Si osservi ad ultimo che il teorema inverso e il teorema contrario sono tra loro equivalenti.

1.6 Le proposizioni della Matematica

Concludiamo questa parte introduttiva di Logica presentando come vengono etichettate le proposizioni in Matematica. Abbiamo già presentato i concetti primitivi ed i postulati come il punto di partenza da cui inizia il discorso matematico.

Si chiama *Definizione* una proposizione in cui si introduce un nuovo oggetto in termini di altri che sono stati presentati e studiati precedentemente. Ad esempio, supponiamo di sapere già cosa è un rettangolo, un quadrilatero che ha quattro angoli retti. A questo punto è possibile definire il quadrato in termini del rettangolo che già si conosce: 'Si definisce quadrato un rettangolo che ha tutti e quattro i lati uguali'.

Una *Proposizione* propriamente detta, è una asserzione che contiene un'implicazione in cui vengono stabilite delle proprietà di un certo oggetto. Esse necessitano di una dimostrazione rigorosa che segua un metodo valido accettato dalla Logica. Ne sono esempi i vari risultati sui numeri pari e dispari che abbiamo provato sopra. Spesso le proposizioni vengono denominate *Teoremi* quando racchiudono un risultato molto importante e fondamentale per il discorso matematico. Un *Lemma* è una proposizione preliminare, che contiene un risultato che serve ad abbreviare le dimostrazioni dei risultati che lo seguono. Un *Corollario* infine è una proprietà che segue immediatamente da un risultato precedente la cui dimostrazione è banale e spesso la si riassume in una sola riga.

2 Logica predicativa

La parte della Logica che abbiamo studiato finora si chiama Logica proposizionale. D'ora in poi lavoreremo con un tipo particolare di enunciati che sono molto importanti in Matematica: i predicati. Chiameremo *predicato logico* un'espressione linguistica $p(x, y, \dots)$ che dipende dai parametri $x, y, \dots$ e di cui si può decidere il valore di verità non appena si "rimpolpano i parametri con oggetti concreti" [†]. Un esempio è il predicato 'Oggi è Lunedì'. Così come è formulato, questo enunciato non è una proposizione nel senso matematico. Infatti giorno dopo giorno il suo valore di verità cambia e non si può stabilire in maniera univoca se è vera o falsa. Se al posto del parametro *oggi* sostituiamo un giorno in particolare, tale enunciato diventa una proposizione. Ad esempio 'Il 23 Settembre 2013 è Lunedì' è una proposizione ed è vera. In questo modo il predicato $p(\text{oggi})$ è diventato la proposizione $p(\text{23 Settembre 2013})$.

I parametri da cui dipende un predicato assumono valori all'interno di un opportuno *insieme di variabilità*. Ad esempio nel predicato $p(\text{oggi})$, il parametro *oggi* assume valori nell'insieme dei vari giorni. Per limitare o controllare tale variabilità vengono molto spesso utilizzati i *quantificatori*. La loro utilità risiede nel fatto che aiutano a determinare velocemente la veridicità, senza dover necessariamente sostituire tutti i possibili valori che il parametro può assumere. Si utilizzano il quantificatore universale $\forall$, che si legge *per ogni*, ed il quantificatore esistenziale $\exists$, leggi *esiste*. Ad ultimo diciamo che per scrivere *non esiste* si usa il simbolo $\nexists$. Consideriamo le frasi seguenti: 'Ogni insetto è una farfalla' ed 'Esistono due numeri interi la cui somma vale -2'. In linguaggio matematico si riscrivono rispettivamente come $p(n)$: '$\forall$ insetto n, n è una farfalla' e $q(x, y)$: '$\exists\, x \wedge \exists\, y$ numeri interi tali che $x + y = -2$'. L'insieme di variabilità di $p(n)$, predicato ad una variabile, è l'insieme di tutti gli insetti. I parametri del predicato a due variabili $q(x, y)$ variano nell'insieme dei numeri interi. Il primo predicato è falso, infatti $p(\text{ape})$ non è vera: non è verificata l'universalità. Il secondo invece è vero poiché è vero $q(-4, 2)$; si ha $-4 + 2 = -2$.

È molto importante imparare a negare correttamente i predicati soprattutto in presenza dei quantificatori. Una errata applicazione delle regole che illustreremo ora è alla base di numerosissimi ed imperdonabili errori che spesso gli studenti (e non solo) compiono nello svolgere esercizi e nel dimostrare risultati.

Proviamo ora a negare il predicato 'Tutti i gatti sono persiani'. Dire che ciò non è vero, non significa che *nessun* gatto è persiano o che tutti i gatti non sono persiani (imprecisione molto diffusa!), significa invece esibire *almeno un* gatto che non è un persiano, così da violare l'universalità del 'tutti'. Esistono ad esempio i gatti soriani ed i siamesi. Si badi che i gatti potrebbero essere anche tutti 'non persiani', ma a noi per negare il 'tutti' basta sapere che ce n'è almeno uno che non è persiano. Supponiamo di avere in generale il predicato $P(x)$: $\forall\ x$ è vera la proprietà $p(x)$. Negare una proprietà universale equivale a dire che esiste almeno un dissidente che viola tale proprietà, ovvero che verifica la negazione di questa proprietà. Quindi $\overline{P(x)}$: $\exists\ x$ per cui è vera la proprietà $\overline{p(x)}$.

[†]Citazione dal libro *Il diavolo in cattedra*, P. Odifreddi, Einaudi

Consideriamo ora la frase 'Esiste un triangolo rettangolo che è isoscele'. Negare questo significa dire che di tutti i triangoli rettangoli che si possono considerare, nessuno è isoscele. Non ci basta che uno solo non sia isoscele, vogliamo che nessuno di essi lo sia. La negazione del quantificatore esistenziale coinvolge quindi quello universale. Supponiamo di avere in generale il predicato $Q(x)$: $\exists\ x$ per cui è vera la proprietà $q(x)$. Negare ciò significa dire che tutti gli oggetti violano tale proprietà, ovvero che tutti verificano la negazione di questa proprietà. Quindi $\overline{Q(x)}$: $\forall\ x$ è vera la proprietà $\overline{q(x)}$. Riassumendo abbiamo quindi la seguente regola:

$$\overline{\forall\ x : p(x)} \Leftrightarrow \exists\ x : \overline{p(x)} \qquad \text{e} \qquad \overline{\exists\ x : p(x)} \Leftrightarrow \forall\ x : \overline{p(x)}.$$

Ai quantificatori studiati si è soliti aggiungerne un altro. Èspesso necessario precisare quando l'esistenza di un oggetto è unica. Si usa in questo caso $\exists!$ che si legge *esiste ed è unico*. Ad esempio va usato nella formulazione del celeberrimo Quinto Postulato di Euclide: 'Dati nel piano un punto P ed una retta r, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela ad r'. Si deve fare attenzione quando si nega l'esistenza unica. Dire infatti che 'non esiste un unico x che verifica $p(x)$' può da un lato significare che 'non esiste alcun x che verifica $p(x)$' oppure che 'esiste più di un x che verifica la proprietà $p(x)$'. Sempre considerando il quinto postulato di Euclide, storicamente negando esso sono nate le *geometrie non euclidee*. La geometria che nega del tutto l'esistenza della retta parallela s si chiama geometria ellittica, quella che ne ammette l'esistenza, ma che ne nega l'unicità, si chiama geometria iperbolica.

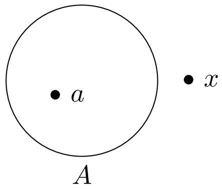
3 Teoria elementare degli insiemi

In questa sezione ci occuperemo di presentare alcuni argomenti elementari scelti di Teoria degli insiemi, imprescindibili per una buona formazione matematica.

3.1 Insiemi e sottoinsiemi

La Matematica si fonda su un importantissimo concetto primitivo, il concetto di *insieme* che può essere pensato come una collezione, un aggregato di certi oggetti, concreti o astratti, che chiameremo i suoi *elementi*. Come di consueto useremo le lettere maiuscole $A, B, X, \dots$ per indicare gli insiemi, quelle minuscole $a, b, x, \dots$ per gli elementi.

Per dire che l'elemento a *appartiene* all'insieme A scriveremo $a \in A$, per dire invece che l'elemento x non appartiene ad A si scrive $x \notin A$. Si dice anche che l'insieme A *contiene* l'elemento a e che non contiene x. Per lavorare più intuitivamente con gli insiemi ci si serve dei *diagrammi di Eulero-Venn*. Un insieme viene rappresentato con un cerchio, i suoi elementi vengono rappresentati al suo interno, gli oggetti che non gli appartengono al suo esterno. Ovviamente un oggetto dato o appartiene o non appartiene ad un insieme, non ci sono altre possibilità. Riconsideriamo l'insieme A preso sopra che contiene a ma non x. Graficamente abbiamo:



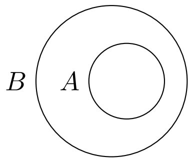
Gli insiemi possono essere rappresentati anche per via *estensiva* o per *elencazione* scrivendo esplicitamente tutti i suoi elementi. Ad esempio, l'insieme P delle province della Puglia può essere scritto come $P = \{\,\text{Bari, BAT, Brindisi, Foggia, Lecce, Taranto}\,\}$. Si può anche utilizzare la rappresentazione per via *intensiva* o per *caratteristica* dove ci si serve di un predicato per descrivere tutti gli elementi in un colpo solo. Ad esempio l'insieme P delle province pugliesi diventa $P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$ che si legge 'P è l'insieme delle x tali che x è una provincia della Puglia'. Ci siamo serviti del predicato $p(x)$: 'x è una provincia della Puglia'. *A latere* sottolineiamo che il simbolo $\mid$ viene letto *tale che*. Spesso, per abbreviare questa espressione, si usano il simbolo : come anche l'acronimo *t.c.*, ma mai nella descrizione intensiva di un insieme in cui si usa sempre $\mid$. Diremo che l'insieme A è *sottoinsieme* dell'insieme B (o che A è contenuto in B) e scriveremo $A \subseteq B$, se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. Formalmente si scrive

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A:\ x \in B.$$

I due punti in questo caso si leggono *risulta che*.

L'insieme $P = \{\, x \mid x \text{ è una provincia della Puglia} \,\}$ è sottoinsieme dell'insieme $I = \{\, x \mid x \text{ è una provincia italiana} \,\}$.

Graficamente abbiamo



in maniera tale che gli oggetti racchiusi dal bordo di A sono necessariamente circondati anche da quello di B. Se A non è contenuto in B si scrive che $A \nsubseteq B$, in altri termini esiste $x \in A$ tale che $x \notin B$.

Il *principio di uguaglianza tra gli insiemi* stabilisce che due insiemi sono uguali se e solo se uno è sottoinsieme dell'altro. In altre parole:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge\ B \subseteq A.$$

Essi hanno quindi esattamente gli stessi elementi. Quando si vorrà dimostrare che due insiemi sono uguali bisognerà far vedere vicendevolmente che uno è sottoinsieme dell'altro. Può accadere che un insieme A sia sottoinsieme di un insieme B, ma che essi non siano uguali. Questo vuol dire che tutti gli elementi di A sono elementi di B, ma che esiste un elemento di B che non è elemento di A. In tal caso si dice che A è strettamente contenuto in B e si scrive $A \subset B$ oppure $A \subsetneq B$ se si vuole enfatizzare che non sono uguali.

Abbiamo bisogno di altri due importanti assiomi: da un lato l'esistenza dell'*insieme vuoto*, $\varnothing$, un insieme che non contiene alcun elemento, e dall'altro, l'esistenza dell'*insieme universo*, U, che invece contiene tutti gli oggetti. L'insieme U solitamente viene indicato nei diagrammi con un rettangolo.

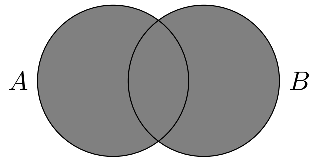
3.2 Operazioni tra insiemi

Come con le proposizioni e con i numeri, si può operare anche con gli insiemi.

Dati due insiemi A e B, chiameremo *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ costituito da tutti gli elementi di A o di B presi insieme:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} .$$

Graficamente l'unione è la parte colorata in figura:

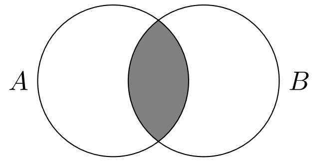


Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, la loro unione è l'insieme $A \cup B = \{ 1, 2, a, b, c \}$. Ovviamente le ripetizioni vanno cancellate.

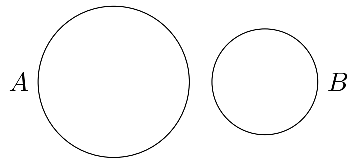
Dati due insiemi A e B, chiameremo *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni di A e di B:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} .$$

Graficamente l'intersezione è la parte colorata in figura:



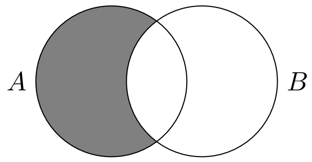
Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, la loro intersezione è l'insieme $A \cap B = \{ 1 \}$. Quando due insiemi A e B non hanno alcun elemento in comune, accade che $A \cap B = \varnothing$ e si dice che A e B sono *disgiunti*. Graficamente si hanno due cerchi separati che non si toccano:



È possibile definire anche la differenza tra due insiemi. Dati due insiemi A e B, chiameremo *differenza* di A e B l'insieme $A \setminus B$ costituito dagli elementi di A che non sono elementi di B:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} .$$

Graficamente è la parte colorata in figura:

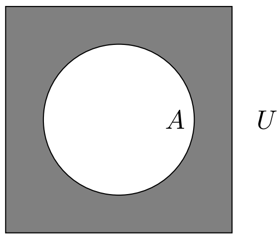


Dati $A = \{ 1, 2, a, b \}$ e $B = \{ 1, c \}$, si ha che $A \setminus B = \{ 2, a, b \}$. Si osservi che in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$. Infatti nel nostro caso $B \setminus A = \{ c \}$.

Diamo un'ultima importantissima definizione. Dato un insieme A, si definisce il *complementare* di A, indicato con $\overline{A}$, l'insieme costituito da tutti gli oggetti che non sono in A:

$$\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \} .$$

Per rappresentarlo graficamente ci si serve dell'insieme universo:



Inoltre vale la seguente uguaglianza $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (lo si provi per esercizio).

Non deve sfuggire il fatto che l'unione è stata definita a partire dalla disgiunzione di due predicati, l'intersezione dalla congiunzione ed il complementare dalla negazione. Infatti la Logica e la Teoria degli insiemi sono strettamente interconnesse tra loro. A partire dalle proprietà viste per i connettivi logici si possono dedurre le analoghe proprietà per le operazioni tra insiemi. Enunceremo solamente il seguente risultato che è l'analogo della Proposizione 1.5, un'idea della dimostrazione è nell'Esercizio **??**.

Proposizione 3.1. *Siano A, B e C insiemi. Allora:*

(i) $\varnothing \subseteq A$ *(il vuoto è contenuto in ogni insieme)*

(ii) $A \subseteq A$ *(ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso)*

(iii) $A \cap \varnothing = \varnothing$ *e* $A \cup \varnothing = A$

(iv) $\overline{\overline{A}} = A$

(v) $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$ *(legge d'idempotenza)*

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

(vii) $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$ *(proprietà commutativa)*

(viii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(proprietà associativa)*

(ix) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *e* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(leggi di De Morgan)*

Dato un insieme A, indicheremo con $\mathcal{P}(A)$ l'*insieme delle parti* di A i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A. In particolare $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ ed $A \in \mathcal{P}(A)$.

Ad esempio $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ perché l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso. Se consideriamo $A = \{1\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}\}$. Infine, se prendiamo l'insieme $B = \{a, b\}$, allora $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Dati un insieme A ed un suo elemento a, si deve fare attenzione a distinguere l'elemento a dall'insieme $\{a\}$, che è l'insieme costituito dal solo elemento a. Non si deve far confusione tra i simboli che abbiamo introdotto sopra. Ad esempio sono giuste le scritture $a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subseteq A \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ e $a \in \{a\}$. Non hanno invece alcun senso $a \subseteq A$, $a \subseteq \{a\}$, $a \in \mathcal{P}(A)$ e $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Un'altra importante operazione che si può definire tra insiemi è il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, definiamo il *prodotto cartesiano* di A e B, l'insieme $A \times B$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* costituite da un elemento di A ed un elemento di B. Più precisamente

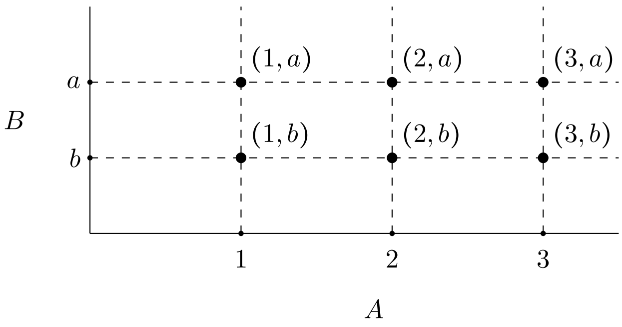
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Se $A = B$, allora si è soliti porre per analogia con i numeri $A \times A = A^2$.

Esempio 3.2. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Allora si ha che $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.

Anche il prodotto cartesiano di due insiemi ha diritto ad una sua rappresentazione grafica. I due insiemi *fattori* vengono schematizzati con due rette perpendicolari. I loro elementi vengono poi rappresentati con dei punti su tali rette. Si costruisce così una rete a maglie rettangolari i cui nodi sono le coppie ordinate, elementi del prodotto cartesiano. Questa rappresentazione è detta *cartesiana*.

Riprendendo l'esempio precedente, si ottiene:



Si può definire il prodotto cartesiano anche di tre o più insiemi in maniera analoga. Dati gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, definiamo il loro prodotto cartesiano l'insieme:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n \}.$$

Il generico elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è detto n-upla ordinata. Il *principio di identità* delle n-uple ordinate stabilisce che, prese due n-uple ordinate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, esse sono uguali se e solo se sono uguali ordinatamente le componenti omologhe, cioè

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n.$$

4 Gli assiomi di Peano e l'Aritmetica

A conclusione di questo capitolo vogliamo fare un esempio di come sia una teoria matematica e la sua assiomatizzazione. Faremo vedere come, a partire da concetti primitivi ed assiomi molto elementari, è possibile costruire una teoria formale. In particolare, costruiremo le solide fondamenta dell'Aritmetica, ricordando che essa è la teoria dei numeri naturali. Pertanto occorre definire in maniera assiomatica l'insieme dei numeri naturali. Ci ispireremo alle idee di Peano, cercando di mantenere il discorso ad un livello non troppo formale per quelli che sono i nostri scopi, ma comunque rigoroso. Osserviamo che questa assiomatizzazione è molto recente (circa un secolo fa), se la confrontiamo con quella della Geometria piana di Euclide che risale al III secolo avanti Cristo.

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali: tre concetti primitivi che daremo per buoni sottintendendo che siano comprensibili a tutti:

(C1) Numero naturale

(C2) Zero

(C3) Successivo di un numero naturale

Parafrasiamo questi tre concetti primitivi. In breve, stiamo dicendo che vogliamo costruire i numeri che ci servono per contare (C1). Abbiamo però bisogno di un punto di partenza (C2) e della possibilità di passare da un numero all'altro nell'atto del contare (C3).

Ora, di questi tre concetti primitivi, dobbiamo elencare delle proprietà evidenti che non hanno bisogno di essere spiegate né provate, gli assiomi:

(A1) Zero è un numero naturale

(A2) Ogni numero naturale ha un successivo che è un numero naturale

(A3) Zero non è il successivo di alcun numero naturale

(A4) Numeri naturali distinti hanno successivi distinti

(A5) Principio di induzione

Ora abbiamo tutto ciò che ci serve. Indicheremo l'insieme che stiamo per costruire con $\mathbb{N}$. Per (A1), *zero* è un numero naturale. Decidiamo di indicare questo numero col simbolo 0. Sicché $\mathbb{N} = \{ 0 \}$. Non abbiamo finito! Per (A2), anche il successivo di 0, chiamiamolo $s(0)$, è un elemento di $\mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} = \{ 0, s(0) \}$. Non può capitare che $0 = s(0)$, perché per (A3) 0 non è il successivo di alcun numero naturale. Allora abbiamo bisogno di un nuovo simbolo per indicare $s(0)$. Decidiamo di usare il simbolo $1 = s(0)$. Quindi $\mathbb{N} = \{ 0, 1 \}$. Il processo non è ancora terminato. Infatti anche il successivo di 1, $s(1)$, è un numero naturale per (A2). Quindi $s(1) \in \mathbb{N}$, ma per (A3) non può valere $0 = s(1)$. Se poi fosse $1 = s(1)$, avremmo $s(0) = s(1)$, il che viola l'assioma (A4), perché i numeri distinti 0 ed 1 non possono avere lo stesso successivo. Ci serve quindi un nuovo simbolo per indicare $s(1)$, per convenzione poniamo $2 = s(1)$. Riassumendo quanto fatto finora, abbiamo $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2 \}$. È facile convincersi che questo processo non si arresta mai e che produce un insieme infinito. L'insieme che si ottiene è proprio l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$. Èdoveroso sottolineare che per costruire $\mathbb{N}$ non abbiamo usato l'assioma (A5). Esso va aggiunto perché serve a dimostrare le proprietà di cui godono i numeri naturali, ma non è strettamente necessario per costruire $\mathbb{N}$ in maniera *naif* come abbiamo fatto noi. A partire dalla costruzione appena vista di $\mathbb{N}$ si possono poi costruire i numeri interi, quelli razionali e così via, sempre in maniera rigorosa, servendosi di eventuali nuovi concetti primitivi ed assiomi. In maniera analoga, a partire dai punti e dalle rette del piano e dagli assiomi di Euclide si costruiscono le fondamenta della Geometria razionale.

5 Il Principio di Induzione

Quando si vuole dimostrare che una proprietà $p(n)$ è vera per i numeri naturali a partire da un certo numero n_0, è utilissimo a volte utilizzare una specifica tecnica dimostrativa, il *principio di induzione*. Già noto nell'Antica Grecia, si tratta di uno degli assiomi di cui il matematico torinese Giuseppe Peano si servì all'inizio del Ventesimo secolo per costruire in maniera formale l'Aritmetica.

Esso consta di due passi: la *base dell'induzione* ed il *passo induttivo*. Formalmente si scrive:

Assioma 5.1 (Principio di Induzione)**.** Sia n_0 un numero naturale. Sia $p(n)$ un predicato che dipende dalla sola variabile $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

(i) $p(n_0)$ è vera (base dell'induzione)

(ii) preso un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, risulta che se $p(n)$ è vera, allora è anche vera $p(n+1)$ (passo induttivo).

Allora $p(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geqslant n_0$.

Facciamo qualche esempio dettagliato.

Esempio 5.2. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, si ha $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nel nostro caso $n_0 = 1$ ed il predicato da dimostrare è l'uguaglianza $p(n) :\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Cominciamo con la base dell'induzione. Dobbiamo verificare che il predicato è vero per $n = n_0 = 1$. Si ha infatti che $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Quindi $p(1)$ è vero. Studiamo ora il passo induttivo. Dobbiamo supporre che per un certo $n > 1$ il predicato $p(n)$ sia vero (la cosiddetta *ipotesi induttiva*) e dobbiamo dedurre da questo che è vero anche $p(n+1)$, cioè che il predicato è vero anche per il successivo di n. Esplicitando si ha che dobbiamo provare $p(n+1) :\ 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ora $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$ per la proprietà associativa dell'addizione. La prima quantità tra parentesi per l'ipotesi induttiva, vale $\frac{n(n+1)}{2}$. Quindi la somma da cui siamo partiti è $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Allora il passo induttivo è soddisfatto, e quindi, grazie al principio di induzione, si ha che $p(n)$ è vera per ogni $n \geqslant 1$ proprio come volevamo dimostrare.

Gauss, grande scienziato dell'Ottocento, trovò questo risultato all'età di soli dieci anni. Egli oggi è considerato il *Princeps mathematicorum.*

Esempio 5.3. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.

In questo caso l'induzione parte da $n_0 = 0$. Il predicato da verificare è $p(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$. Èfacile convincersi che $p(0) : 1 = 1^2$ è vero. Vediamo ora il passo induttivo. Sia $n > 0$ e supponiamo che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$. Dobbiamo allora provare che anche $p(n+1) : 1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2(n+1)+1) = (n+2)^2$ è verificato. Sfruttando l'ipotesi induttiva ed isolando l'ultimo addendo, abbiamo che $[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)] + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Il passo induttivo è dunque soddisfatto. Per principio di induzione, si ha che $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, come volevasi dimostrare.