Il Principio degli indivisibili di Cavalieri

Il Principio degli indivisibili di Cavalieri [1] è considerato l'embrione del *calcolo integrale* che nel Diciassettesimo secolo si andava sviluppando ad opera di Torricelli, Barrow e Newton. Ispirato dalle intuizioni di Galilei, per calcolare la misura delle figure geometriche questo Principio suggerisce di suddividere tali figure in elementi di misura *piccolissima*, gli *indivisibili*, e sommando poi i vari contributi di ciascuno di essi:

> *Una retta è composta da punti come un rosario da grani; un piano è composto da rette come una stoffa da fili e un volume è composto da aree piane come un libro da pagine.* (Exercitationes geometricae sex, 1647)

Tale metodo di calcolo fu ferocemente avversato da Guldino che preferiva calcolare i volumi e le aree come facevano Archimede ed Euclide usando il *metodo per esaustione*. Le *Exercitationes geometricae* furono scritte da Cavalieri in risposta alla *Centrobaryca* di Guldino, un'opera in cui il matematico svizzero attaccava il nuovo metodo di calcolo introdotto da Cavalieri.

Useremo il moderno linguaggio degli integrali per descrivere tale principio in maniera più operativa. Nei corsi base di Analisi è stato introdotto l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

per calcolare l'area del *trapezoide* sotteso al grafico di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Si tratta allora di pensare il trapezoide come suddiviso in tanti rettangoli elementari di altezza $f(x)$ e di spessore infinitamente piccolo dx. L'area di un indivisibile di questo tipo è dato da $f(x)dx$ e l'area del trapezoide dalla somma (da cui deriva il simbolo per indicare l'integrale) di tali *infiniti* contributi facendo variare x dal valore a al valore b.

Similmente un solido viene sezionato in tanti indivisibili il cui volume elementare è dato dal prodotto dell'area $A(x)$ della sezione che individuano per il loro spessore infinitesimo dx.

Illustriamo il Principio di Cavalieri con alcuni esempi.

Esempi

1. Calcoliamo l'area di un triangolo di base b ed altezza h. È più conveniente considerare come indivisibili i segmenti di spessore infinitesimo che sono paralleli alla base. In questo caso caso la coordinata x di un indivisibile rappresenta la sua distanza dal vertice e si ha $0 \leqslant x \leqslant h$. La lunghezza $f(x)$ di un indivisibile è data da $f(x) = \frac{bx}{h}$, grazie ai teoremi sui triangoli simili. Quindi l'area del triangolo vale

$$\mathcal{A} = \int_0^h \frac{bx}{h}dx = \frac{bh}{2}.$$

2. Calcoliamo il volume del cono di raggio di base r e di altezza h. Come indivisibile consideriamo una sezione tagliata da un piano perpendicolare all'asse del cono. Gli indivisibili sono quindi dei cerchi di spessore infinitesimo. Supponiamo che x sia la

[1] Bonaventura Cavalieri, matematico bolognese del Seicento, oltre che per il Principio degli indivisibili è ricordato per l'*Assonometria Cavaliera*, un utilissimo metodo per disegnare nel foglio bidimensionale oggetti tridimensionali.

distanza dell'indivisibile dal vertice del cono. Allora $0 \leqslant x \leqslant h$. Il raggio della sezione circolare corrispondente vale (per ragioni di similitudine) $r(x) = \frac{rx}{h}$. Infine l'area della sezione è $A(x) = \pi \frac{r^2 x^2}{h^2}$.

Infine

$$\mathcal{V} = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

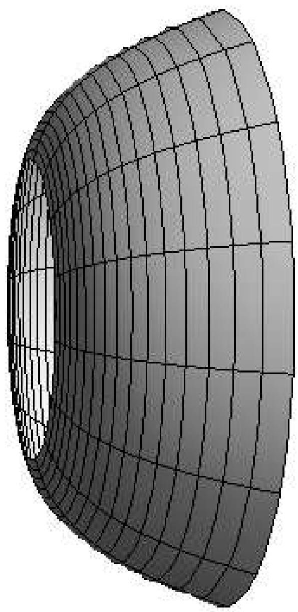
Pertanto il volume del cono è $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. □

Solidi di rotazione attorno all'asse delle ascisse

Sia data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $a > 0$. Ci proponiamo di calcolare il volume del solido di rotazione S che si ottiene facendo ruotare il trapezoide sotteso al grafico di f attorno all'asse x. Si ha che

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b,\ y^2 + z^2 \leqslant [f(x)]^2 \right\}.$$

Visivamente si ottiene:



Usando il Principio degli indivisibili, conviene affettare l'insieme S secondo dei piani perpendicolari all'asse x. Le sezioni saranno dunque dei cerchi di raggio $f(x)$ e quindi di area $\pi[f(x)]^2$. È facile allora convincersi che

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Esempio

Calcolare il volume del tronco di cono T di altezza h e di raggi di base $r < R$. Per comodità di calcolo è più conveniente pensare T come il solido che si ottiene facendo ruotare nello spazio il segmento di estremi $(0,r)$ e (h,R) attorno all'asse x. La retta passante per questi due punti è $y(x)=\frac{R-r}{h}x+r$. Sicché

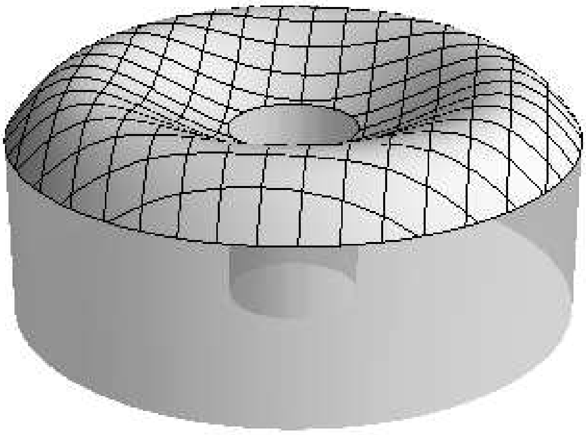
$$\mathcal{V}(T)=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2dx=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+rR). \qquad \blacksquare$$

Solidi di rotazione attorno all'asse delle ordinate

Sia data ora una funzione continua $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $a>0$. Ci proponiamo di calcolare il volume del solido di rotazione W che si ottiene facendo ruotare il trapezoide sotteso al grafico di g attorno all'asse y. Si ha che

$$W=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;a^2\leqslant x^2+z^2\leqslant b^2,\;0\leqslant y\leqslant f(x)\,\right\}.$$

Visivamente si ottiene:



Usando il Principio degli indivisibili, conviene suddividere l'insieme W secondo delle superficie cilindriche coassiali con l'asse y (come negli strati della cipolla). Gli indivisibili sono quindi le superficie laterali di un cilindro di raggio di base x e di altezza $g(x)$. Quindi l'area di un indivisibile è $2\pi x g(x)$. È facile allora convincersi che

$$\mathcal{V}(W)=2\pi\int_a^b x\,g(x)\,dx.$$

Esempio
Consideriamo l'insieme

$$L=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;1\leqslant x^2+z^2\leqslant 4,\;0\leqslant y\leqslant \log x\,\right\}.$$

Esso rappresenta il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il trapezoide della funzione $\log x$ (per $1\leqslant x\leqslant 2$) attorno all'asse y.
Il volume di L vale:

$$\mathcal{V}(L)=2\pi\int_1^2 x\,\log x\,dx=2\pi\left(\log 4-\frac{3}{4}\right). \qquad \blacksquare$$

Alla luce del Principio degli indivisibili di Cavalieri si capisce anche perché è stato usato l'integrale doppio

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

per calcolare il volume del cilindroide C_f sotteso ad f sopra D. Il cilindroide infatti è stato ripartito in infiniti indivisibili di area di base infinitesima $dxdy$ e di altezza pari a $f(x,y)$. Il volume di un tale indivisibile è quindi $V(x,y) = dxdy \cdot f(x,y)$. Per calcolare poi il volume di C_f è necessario estendere la somma all'intero dominio D.

Antonio Cigliola