Università degli Studi di Roma La Sapienza
Laurea in Ingegneria Energetica – A.A. 2016-2017
Programma definitivo del corso di Analisi Matematica II
Prof. Antonio Cigliola

Successioni di funzioni

Successioni di funzioni (di una variabile reale). Convergenza puntuale. Convergenza uniforme (Weierstrass). La convergenza uniforme implica quella puntuale, il viceversa non è vero in generale. Esempi. Formulazioni equivalenti (più operative) dell'uniforme convergenza: Una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione f su un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ risulta che $\sup_{x\in I}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \epsilon$, se e solo se $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I}\{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$. Teorema di continuità del limite uniforme: Se una successione di funzioni continue $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione f su un insieme I, allora anche la funzione limite f è continua su I. L'ipotesi di convergenza uniforme è necessaria, inoltre il teorema non si inverte. Teorema di inversione dei limiti: Sia data una successione di funzioni continue $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente ad una funzione f su un insieme I, preso allora $x_0 \in I$ si ha che $\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))$. Teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale (Seidel, Stokes): Sia data una successione di funzioni continue $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente ad una funzione f su $[a, b]$, allora $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. L'ipotesi di uniforme convergenza è necessaria. Analisi qualitativa dei grafici di alcune successioni di funzioni studiate e del loro limite puntuale. La convergenza uniforme non basta a garantire la derivabilità del limite di una successione di funzioni. Teorema del passaggio al limite sotto il segno di derivata: Sia data una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ derivabili con derivata prima continua e definite su un compatto $[a, b]$. Supponiamo che esista un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione numerica $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente. Supponiamo infine che la successione delle derivate prime $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente uniformemente su $[a, b]$. Allora le f_n convergono uniformemente su $[a, b]$ ad una funzione f per la quale vale la formula $\lim_{n\to+\infty} f'_n(x)dx = f'(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.

Serie di funzioni

Introduzione alle serie di funzioni, motivazione. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e calcolo della somma. Serie geometrica. Serie telescopiche (Mengoli). Convergenza assoluta. Convergenza uniforme. La convergenza puntuale (uniforme) di una serie equivale alla convergenza puntuale (uniforme) a zero del resto. Convergenza totale (Weierstrass). La convergenza assoluta implica la convergenza puntuale (non vale il viceversa). La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non vale il viceversa). La convergenza totale implica la convergenza uniforme, assoluta e puntuale (non valgono i viceversa). Esempi vari. Teorema di continuità della somma: Sia data la serie di funzioni continue $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ convergente uniformemente su $[a, b]$ alla funzione somma $S(x)$. Allora anche S è una funzione continua. Teorema di integrazione termine a termine: Sia data la serie di funzioni continue $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ convergente uniformemente su $[a, b]$ alla funzione somma $S(x)$. Allora $\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$. Teorema di derivazione termine a termine: Sia definita su un intervallo $[a, b]$ la serie di funzioni derivabili con derivata continua $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$. Sia poi convergente uniformemente su $[a, b]$ la serie delle derivate prime $\sum_{n\geqslant 0} f'_n(x)$. Allora S è derivable con derivata continua e risulta che $\sum_{n\geqslant 0} f'_n(x)dx = S'(x)$, per ogni $x \in [a, b]$. Esempi.

Serie di potenze, serie di Taylor

Serie di potenze. Motivazione. Esempi. Le serie di potenze hanno insieme di convergenza mai vuoto, esse convergono per $x = 0$. Lemma: Se la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge in un punto

$\xi \neq 0$, allora la serie converge assolutamente in ogni intervallo compatto contenuto nell'intervallo $(-|\xi|;|\xi|)$. Teorema (dell'insieme di convergenza): Data la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, è vera una sola delle seguenti possibilità: (a) la serie converge solo per $x = 0$, (b) la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, (c) esiste $R > 0$ tale che la serie converge per $|x| < R$ e diverge per $|x| > R$. L'insieme I di convergenza di una serie di potenze è sempre un intervallo circolare centrato nell'origine (ammettiamo per comodità i casi limite con raggio nullo $I = \{0\}$ e con raggio infinito $I = \mathbb{R}$). Se l'insieme I di convergenza di una serie di potenze è un intervallo limitato, l'appartenenza degli estremi ad I va discussa caso per caso. Teorema (D'Alembert): Sia data la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dove $a_n \neq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, (se tale limite esiste) e sia R il raggio di convergenza. Se $l = 0$, allora $R = +\infty$; se $l = +\infty$, allora $R = 0$; infine se $l \neq 0$, allora $R = \frac{1}{l}$. Teorema (Cauchy-Hadamard): Sia data la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dove $a_n \neq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, (se tale limite esiste) e sia R il raggio di convergenza. Se $l = 0$, allora $R = +\infty$; se $l = +\infty$, allora $R = 0$; infine se $l \neq 0$, allora $R = \frac{1}{l}$. Esempi di calcolo dell'insieme di convergenza di serie di potenze. Serie derivata di una serie di potenze. Proposizione: Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata. Teorema: Sia data la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, con raggio di convergenza $R \neq 0$, e sia $f(x)$ la sua funzione somma. Allora, per ogni $|x| < R$, valgono le seguenti uguaglianze: $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ e $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Serie di potenze centrate in un punto x_0, determinazione del raggio e dell'insieme di convergenza. Esempi. Serie di Taylor e di Mac Laurin: motivazione. Teorema: Se la serie di potenze $\sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n$ ha somma $f(x)$ e raggio di convergenza $R \neq 0$, allora $f(x)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e le sue derivate sono date da $f^{(m)}(x) = \sum_{n\geqslant m} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$. Inoltre $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Sviluppo in serie di Taylor e di Mac Laurin. Esempio di una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ che non è somma della sua serie di Taylor. Teorema: Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$ e si supponga che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in (a,b)$, $|f^{(n)}(x)| < m \cdot L^n$, con $M, L > 0$. Allora per ogni $x_0 \in (a,b)$ la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor con punto iniziale x_0. Se una funzione è indefinitamente derivabile in un intervallo (a,b) ed ha ivi le derivate equilimitate, allora essa è somma della sua serie di Taylor di punto iniziale un qualsiasi $x_0 \in (a,b)$. Teorema (di Abel): La somma serie di potenze è continua in ogni punto in cui la serie converge. Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x, \frac{1}{1-x}, \log(x+1)$, $\arctan x$. Calcolo di $\log 2$ e π per mezzo di approssimazioni. Serie ciclometrica e versiera dell'Agnesi. Calcolo approssimato di integrali definiti. Risoluzione di equazioni differenziali per mezzo di sviluppi in serie di potenze.

Serie di Fourier

Serie di Fourier: motivazione. Funzioni periodiche. Combinazioni lineari di funzioni periodiche sono ancora periodiche. Polinomi trigonometrici. Serie trigonometriche. L'applicazione $b(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, con f e g funzioni continue sul compatto $[a,b]$, definisce un prodotto scalare su $\mathcal{C}([a,b])$. L'insieme $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \sin kx,\ \cos kx\right\}_{k\geqslant 1}$ è un sistema ortonormale dell'insieme $\mathcal{C}([0,2\pi])$. Norma e distanza indotte dall'applicazione bilineare b. Polinomi trigonometrici approssimanti una funzione continua. Serie di Fourier, coefficienti di Fourier. La successione delle somme parziali della serie di Fourier di una funione continua converge alla funzione data in norma quadratica. Serie di Fourier di una funzione integrabile (non necessariamente continua). Due funzioni integrabili con stessa norma quadratica non sono necessariamente uguali. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier delle funzioni regolari a tratti. Esempi. Calcolo di π per mezzo di serie di Furier notevoli. Applicazioni fisiche (cenni): analisi armonica di segnali periodici, il diapason e i suoni armonici, corde vibranti, onde stazionarie, accordatura di strumenti musicali, fenomeno dei battimenti.

Topologia euclidea nel piano

Il piano euclideo. Prodotto scalare. Distanza euclidea. Diseguaglianza triangolare e di Cauchy-Schwarz. Intorni circolari. Punti interni, punti esterni, punti di frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Punti di accumulazione. Punti isolati. Parte interna, frontiera e derivato di un sottoinsieme del piano. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Chiusura e parte interna di un sottoinsieme del piano. Insiemi connessi. Insiemi limitati. Semirette, segmenti, angoli, semipiani. Funzioni reali di due variabili reali. Grafico. Rappresentazione grafica di alcuni facili tipi di funzioni di due variabili: porzioni di sfere, coni, paraboloidi. Funzioni con grafico di tipo cilindrico. Funzioni a simmetria radiale. Dominio di una funzione di due variabili. Linee di livello. Limite di una funzione di due variabili in un punto di accumulazione del dominio. Verifica dei limiti. Restrizione di una funzione. Data la funzione f ed un punto di accumulazione $P_0(x_0, y_0)$ del suo dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si ha che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se e solo se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_B(x, y) = l$ per ogni sottoinsieme B di A per cui P_0 è punto di accumulazione. Condizione necessaria di esistenza del limite. Esempi ed applicazioni. Teoremi notevoli sui limiti: unicità del limite, teoremi del confronto, algebra dei limiti. Coordinate polari. Calcolo dei limiti in coordinate polari centrate nell'origine ed in un generico punto $P_0(x_0, y_0)$. Data la funzione f ed un punto di accumulazione $P_0(x_0, y_0)$ del suo dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si ha che se esiste $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$, allora esiste anche il limite $\lim_{\rho\to0^+} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$, che è indipendente da θ, inoltre tali due limiti coincidono. Condizione necessaria di esistenza del limite in termini di coordinate polari. Teorema: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia (x_0, y_0) punto di accumulazione per A. Supponiamo poi che esistano $l \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ed una funzione $g : [0, r] \to [0, +\infty)$ tali che $\lim_{\rho\to0^+} g(\rho) = 0$ e che $|f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - l| < g(\rho)$, per ogni $\rho \in [0, r]$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora esiste $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$. Funzioni divergenti positivamente o negativamente in un punto di accumulazione del dominio. Verifica dei limiti. Continuità di una funzione in un punto isolato o di accumulazione del suo dominio. Funzioni continue. Esempi. Punti di massimo assoluto e di minimo assoluto. Teorema (di Weierstrass): Una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato (compatto) ammette un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto nel suo dominio. Tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass sono necessarie per la validità generale dell'enunciato. Il teorema di Weierstrass non si inverte. Sottoinsiemi chiusi e connessi del piano. Lemma: Sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sul sottoinsieme chiuso $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora gli insiemi $C_{\geqslant k} = \{(x, y) \in C \,|\, f(x, y) \geqslant k\}$ e $C_{\leqslant k} = \{(x, y) \in C \,|\, f(x, y) \leqslant k\}$ sono sottinsiemi chiusi del piano. Teorema dei valori intermedi (Darboux): Una funzione continua definita su un compatto connesso del piano assume tutti i valori compresi tra il suo valore minimo ed il suo valore massimo. Teorema degli zeri (Bolzano): Se una funzione continua definita su un connesso assume valore positivo su un punto e valore negativo su un altro punto del dominio, allora ammette uno zero, ovvero si annulla in almeno un punto del suo dominio (dimostrazione nel caso particolare di un dominio compatto e connesso). Applicazioni allo studio del segno di una funzione di due variabili.

Calcolo differenziale in due variabili reali

Derivate parziali di una funzione di due variabili definita su un aperto. Esempi e regole di calcolo immediato. Funzioni derivabili parzialmente in un punto e in un insieme. Esempi di funzioni che non sono derivabili parzialmente in tutti i punti del proprio dominio. Derivabilità nei punti di frontiera per le funzioni definite su un chiuso (privo di punti isolati). La derivabilità parziale di una funzione in un punto non implica in generale la continuità della funzione in quel punto. Derivate parziali seconde pure e miste. Esempi. Funzioni derivabili due volte in un punto e in un insieme. Gradiente e matrice hessiana di una funzione di due variabili in un punto. Teorema d'inversione dell'ordine di derivazione (Schwarz): Sia f una funzione derivabile due volte in un aperto di $\mathbb{R}^2$. Siano poi le derivate parziali seconde miste di f continue in un punto $P_0 \in A$. Allora $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0)$. Le ipotesi di continuità delle derivate parziali seconde miste sono necessarie per la validità generale del teorema di Schwarz. Differenziabilità. Formulazione con la notazione di Landau (o-piccolo). Costruzione del piano tangente. Equazione del piano tangente al grafico di una funzione differenziabile in un punto. Notazione vettoriale per la differenziabilità. Teorema: Se una funzione è differenziabile in un punto P_0, allora è anche continua in P_0. Teorema (del differenziale totale): Se una funzione derivabile ha derivate parziali prime continue in un punto del dominio, allora essa è differenziabile in quel punto. Il differenziale di una funzione in un punto come forma lineare (in una e due variabili). Curve differenziabili nel piano. Composizione di una funzione di due variabili con una curva nel piano. Teorema (della chain rule): Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva contenuta in A. Se le funzioni componenti $x(t)$ e $y(t)$ di γ sono derivabili in $t_0 \in I$ e se la funzione f è differenziabile nel punto $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, allora anche la funzione composta $F = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in t_0 e vale la formula: $F'(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0)$. Esempi. Teorema (di Eulero): Sia $f(x, y)$ un polinomio omogeneo di grado positivo n nelle variabili x ed y. Allora vale la formula di Eulero: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y = nf(x, y)$. Introduzione alla formula di Taylor. Formula di Taylor con il resto di Lagrange (arrestata al secondo ordine): Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2(A)$, con A aperto in $\mathbb{R}^2$. Siano $P_0(x_0, y_0)$ ed $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ sufficientemente piccolo. Allora esiste $\vartheta \in (0, 1)$ tale che $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)k^2\right]$. Formula di Taylor con il resto di Peano (arrestata al secondo ordine): Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2(A)$, con A aperto in $\mathbb{R}^2$. Siano poi $P_0(x_0, y_0)$ ed $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ sufficientemente piccolo. Allora $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + o(h^2 + k^2)$, oppure in forma più compatta, tirando in ballo gradiente e matrice hessiana, si ha: $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k) + \frac{1}{2}(h, k)H_f(x_0, y_0)\binom{h}{k} + o(h^2 + k^2)$. Massimi e minimi relativi o assoluti per funzioni di due variabili. Esempi vari e richiami. Teorema di Fermat (condizione necessaria del primo ordine): Se una funzione f è definita su un insieme A ed è derivabile in un punto P_0, interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f, allora il gradiente di f si annulla in P_0. Punti critici di una funzione. Punti a piano tangente orizzontale. Punti di sella. Forma quadratica indotta dalla matrice hessiana (nelle ipotesi del teorema di Schwarz). Richiami sulla classificazione delle forme quadratiche su $\mathbb{R}^2$. Lemma: Sia Q una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ e siano λ_1 e λ_2 i suoi autovalori, con $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Allora, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ si ha che $\lambda_1 \|v\|^2 \leqslant Q(v) \leqslant \|v\|^2$. Teorema (condizione sufficiente del secondo ordine): Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2(A)$ e sia P_0 un punto stazionario di f interno ad A. Se $H_f(P_0)$ è una matrice definita positiva, allora P_0 è un punto di minimo relativo; se $H_f(P_0)$ è una matrice definita negativa, allora P_0 è un punto di massimo relativo; se $H_f(P_0)$ è una matrice indefinita, allora P_0 è un punto di sella. Teorema (condizione sufficiente del secondo ordine): Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2(A)$ e sia P_0 un punto stazionario di f interno ad A. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$ e $\det H_f(P_0) > 0$, allora P_0 è un punto di minimo relativo; se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$ e $\det H_f(P_0) > 0$, allora P_0 è un punto di massimo relativo; se $\det H_f(P_0) < 0$, allora P_0 è un punto di sella. Metodi di analisi dei punti critici determinante hessiano nullo. Punti di flesso delle curve algebriche piane (cenni).

Calcolo integrale in due variabili

Domini normali rispetto all'asse x o all'asse y. Aree di domini normali. Se un sottoinsieme è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y, la misura della sua area è indipendente dalla rappresentazione scelta. Se D è un sottoinsieme del piano che si può scrivere come unione finita di domini normali rispetto agli assi che hanno parti interne a due a due disgiunte, allora l'area di D è data dalla somma delle aree dei domini di cui è unione. Data una funzione f costante di valore $\alpha \geqslant 0$ ed un dominio normale D del piano, il volume del prismoide di base D sotteso ad f è dato dal prodotto dell'area di D per l'altezza α. Cilindroidi (o prismoidi) sottesi al grafico di una funzione continua su un dominio normale. Integrali doppi. Calcolo di aree e volumi per mezzo di integrali doppi. Formule di riduzione per il calcolo di integrali doppi. Esempi. Calcolo di integrali doppi per sostituzione. Dato un cambio di variabili (o trasformazione del piano) Φ di equazioni $\Phi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$ si definisce matrice jacobiana di Φ la matrice $J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ e (determinante) jacobiano di Φ il suo determinante $\det J_\Phi$. Nel cambiamento di variabili indotto da Φ l'elemento infinitesimo di area subisce un riscalamento secondo il valore assoluto dello jacobiano di Φ: $dA = dxdy = |\det J_\Phi|\, dudv$. Vale la seguente formula del cambiamento di variabili per gli integrali doppi: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Phi^{-1}(D)} f(x(u, v),\, y(u, v))|\det J_\Phi|dudv$, dove con $\Phi^{-1}(D)$ si intende la descrizione di D nelle nuove variabili u e v. Cambiamento di coordinate da cartesiane a polari. Integrali doppi da risolvere in coordinate polari. Esempi vari. Baricentro (centro di massa) di lamine piane (compatte e connesse). Se un dominio piano ha un asse di simmetria r, allora il centro di massa appartiene ad r. Principio degli indivisibili di Cavalieri (Note). Esempi. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $a \geqslant 0$, una funzione continua. Il solido ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse x ha volume dato da $\mathcal{V} = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\, dx$, mentre il solido ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse y ha volume dato da $\mathcal{V} = 2\pi \displaystyle\int_a^b x f(x)\, dx$. Primo teorema di Guldino: Il volume del solido ottenuto facendo ruotare un dominio piano D (connesso e compatto) attorno ad una retta r, complanare con D e che non interseca D nei suoi punti interni, è dato dal prodotto dell'area di D per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro di D nelle rotazione attorno ad r. Esempi.

Topologia e calcolo differenziale in tre e più variabili

Gli insiemi $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$ come spazi vettoriali reali. Metriche e distanze su $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici aperti. Punti interni, esterni, di frontiera, isolati e di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$. Sottoinsiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$. Funzioni di tre o più variabili reali a valori reali. Rappresentazione grafica dei domini di funzioni reali di tre variabili reali. Limiti, continuità, derivabilità, differenziabilità di funzioni reali di più variabili reali. Gradiente e matrice hessiana in più variabili reali. Generalizzazione a più variabili del teorema di Schwarz, del differenziale totale, degli zeri, di Taylor con il resto di Peano. Massimi e minimi locali in più variabili reali. Campi vettoriali definiti da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Funzioni componenti di campi vettoriali. Esempi. Continuità, derivabilità, differenziabilità di campi vettoriali. Matrice jacobiana di un campo vettoriale (differenziabile). La matrice jacobiana di un'applicazione lineare definita da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ coincide con la matrice associata all'applicazione rispetto alle basi canoniche.

Calcolo integrale in tre variabili reali

Domini normali rispetto al piano xy nello spazio $\mathbb{R}^3$. Volume di domini normali nello spazio. Esempi di grafici e di calcolo del volume di domini dello spazio. Integrali tripli. Interpretazione fisica. Coordinate cilindriche. Integrali tripli in coordinate cilindriche. Esempi ed applicazioni. Coordinate sferiche. Integrali tripli in coordinate sferiche. Esempi ed applicazioni. Baricentri di regioni compatte e connesse dello spazio.

Curve parametriche e integrali survilinei

Curve parametriche nel piano. Grafico (o sostegno) di curve nel piano. Curve chiuse, curve aperte. Curve semplici (iniettive nei punti interni). Curve parametriche. Esempi di curve chiuse, aperte, semplici. Curve regolari. Esempi. Retta tangente ad una curva parametrica in un suo punto. Vettore e versore tangente in un punto. Versore normale in un punto. Curve regolari non sono necesariamente semplici e viceversa, curve semplici non sono necessariamente regolari. Esempi. Curve cartesiane e loro parametrizzazione canonica: se una curva ha nel piano equazione $y = f(x)$, essa ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$ Esempi. Curve polari. Rappresentazione grafica di curve polari. Parametrizzazione di curve polari: se una curva ha nel piano equazione polare $\rho = \rho(\theta)$, essa ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$ Esempi. La cardioide (Pascal) di equazione $\rho = 1 + \cos\theta$. La spirale di Archimede di equazione $\rho = \theta$. La cicloide (curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su di una retta). Equazioni polari della cicloide: $\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta \end{cases}$. Equazione polare e cartesiana della cicloide. La cicloide non è una curva algebrica. Proprietà fisiche della cicloide: essa è una curva isocrona, tautocrona e brachistocrona. Cenni storici. Rullette, epicicloidi, ipocicloidi. L'asteroide. La cardioide. Curva podale di una curva rispetto ad un punto (detto piede). La podale della parabola è una curva cubica. La podale della parabola rispetto al suo vertice è la cissoide di Diocle (cubica con una cuspide ed un asintoto). Il problema della duplicazione del cubo (cenni storici). La podale di una circonferenza è una quartica detta lumaca di Pascal. La cardioide vista come podale di una circonferenza. Curve descritte da bracci meccanici articolati. Curve di Watt: cenni ed esempi. Lunghezza di una curva parametrica. Esempi. Lunghezza di una curva cartesiana. Integrali ellittici (cenni). Lunghezza di una curva polare. Lunghezza della cardioide. Curve con lo stesso grafico non hanno la stessa lunghezza (la formula della lunghezza tiene anche conto di quante volte viene percorsa la curva). Integrali curvilinei lungo curve piane. Calcolo e interpretazione geometrica. Esempi. Baricentro di curve piane. Lunghezza e baricentro dell'asteroide. Curve nello spazio. Curve piane e curve sghembe dello spazio. L'elica cilindrica, esempi notevoli (Mascarino, Bernini, Borromini). Curve aperte, chiuse, semplici, regolari nello spazio. Lunghezza di una curva nello spazio. Integrali curvilinei lungo curve dello spazio. Interpretazione fisica. Baricentro di curve nello spazio. Richiami e complementi su curve. Curve e equivalenti e riparametrizzazioni. La lunghezza della curva non dipende dalla riparametrizzazione. Analogamente, l?integrale curvilineo non dipende dalla riparametrizzazione. Concatenamento di curve. Esempi e controesempi. Orientamento di una curva. Concatenamento di curve regolari. Curve regolari a tratti. Linearità degli integrali curvilinei rispetto al concatenamento di curve.

Campi vettoriali, forme differenziali

Campi vettoriali, introduzione e prime definizioni. Esempi di campi vettoriali: Campo gravitazionale, campo magnetico di un filo, campo di velocità di un fluido viscoso, campo gradiente. Lavoro di un campo vettoriale. Definizione e prime proprietà (linearità e segno in base alla percorrenza): il lavoro non dipende dalla parametrizzazione della curva (a meno del segno). Esempi. Energia cinetica ed energia potenziale di un campo gradiente. Conservazione dell'energia totale. Campi conservativi. Potenziale di un campo. Il campo gravitazionale è conservativo. Il lavoro svolto lungo una curva regolare (a tratti) dipende solo dal punto iniziale e quello finale della curva. Calcolo di potenziali. Esempi di campi vettoriali che non ammettono potenziali. Teorema di caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi. ùOsservazioni sul teorema di caratterizzazione. Due potenziali di un campo differiscono per una costante. Campo rotore (regola del determinante). Interpretazione fisica. Teorema: Se un campo è conservativo allora è irrotazionale. Il viceversa è falso (esempio). Domini semplicemente connessi nel piano e nello spazio. Esempi. Se un campo irrotazionale è definito su insieme semplicemente connesso allora è conservativo. Ulteriori esempi. Il formalismo delle forme differenziali (Campi vettoriali = Forme differenziali) in dimensione 2. Integrale di una forma lungo una curva. Primitiva di una forma. Forme esatte. Forme chiuse. Relativi teoremi di caratterizzazione. Orientazione positiva per la frontiera di un dominio regolare. Formule di Gauss-Green in dimensione 2 (con dimostrazione nel caso di domini normali). Applicazioni delle Formule di Gauss-Green. Teorema di Stokes in 2 dimensioni. Calcolo delle aree di regioni di $\mathbb{R}^2$. Condizione necessaria per l'esattezza delle forme chiuse in domini con lacune. Flusso di un campo vettoriale. Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$. Esempi.

Superficie regolari e integrali di superficie

Superficie regolari, curve coordinate, versori tangenti coordinati. Versore normale e piano tangente in un punto. Superficie grafico e sue proprietà. Esempi: Sfera, Cilindro, Cono e Elicoide. Area di una superficie regolare. Area di una superficie grafico (superficie cartesiana). Integrali superficiali di funzioni di tre variabili. Baricentro di una superficie. Area di una superficie di rotazione. Teorema di Guldino per le aree di superficie di rotazione. Esempi: cono e toro. Superfici regolari orientabili. Esempio di superficie non orientabile (il nastro di Möbius). Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile. Domini regolari e teorema della divergenza in dimensione 3. Superfici con bordo orientato. Teorema di Stokes in dimensione 3.

Funzioni implicite

Richiami sulle curve algebriche. Grafici di curve algebriche che sono anche grafico di funzioni di una variabile reale. Funzioni definite implicitamente da un'equazione in due variabili. Esempi vari. Enunciato del teorema del Dini: Sia $F(x,y)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su un aperto di $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ tale che $F(P_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \neq 0$. Allora esistono $\delta, \sigma > 0$ tali che l'equazione in due variabili $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $f : (x_0-\delta,\ x_0+\delta) \to (y_0-\sigma,\ y_0+\sigma)$

cioè una funzione tale che $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ e tale che $y_0 = f(x_0)$. Inoltre, f è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale la formula $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}$, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se poi F è di classe $\mathcal{C}^k$, anche f è di classe $\mathcal{C}^k$ nel suo dominio. Esempi sul Teorema del Dini. Versione del teorema in cui $\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \neq 0$. Conseguenze ed applicazioni. Calcolo della derivata seconda di funzioni definite implicitamente. Calcolo di massimi e minimi locali di funzioni definiti implicitamente. Calcolo del polinomio di Taylor di funzioni implicitamente definite. Teorema della retta tangente: Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto regolare della curva $\mathscr{C}$ (non necessariamente algebrica) definita dall'equazione $F(x, y) = 0$, allora la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P_0 è data da $\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) = 0$.

Massimi e minimi vincolati

Massimi e minimi vincolati. Motivazione. Esempi di vincoli esprimibili per mezzo di equazioni parametriche. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione due. L'ipotesi di derivabilità del vincolo nel punto di estremo locale è necessaria nel teorema di Lagrange. Cenni in più variabili. Applicazione alla risoluzione di problemi geometrici (minima e minima distanza). Massimi e minimi sotto condizioni di due o più vincoli.

Libro di testo adottati

Elementi di Analisi Matematica due, Marcellini-Sbordone, *Liguori*
Complementi di Analisi Matematica II, Cigliola-de Bonis-De Cicco, *La Dotta*
Analisi Matematica 2, Bramanti-Pagani-Salsa, *Zanichelli*