Università degli Studi di Roma La Sapienza
Laurea in Ingegneria Elettrotecnica – A.A. 2018-2019
Programma dettagliato del corso di Geometria
Prof. Antonio Cigliola

Prerequisiti

Logica elementare. Teoria elementare degli insiemi. Insiemi numerici. Equazioni e disequazioni. Goniometria e trigonometria. Geometria Analitica di base.

Algebra Astratta

Tecniche dimostrative (dimostrazione per assurdo, dimostrazione diretta, dimostrazione in cerchio per le catene di equivalenze, dimostrazione per contronominale). Principio di Induzione.

Applicazioni (o funzioni) tra insiemi. Principio di identità tra funzioni. Applicazione costante. Insieme immagine $\mathrm{Im}f$ di un'applicazione f. Immagine diretta di un sottoinsieme del dominio. Controimmagine di un elemento e di un sottoinsieme dell'insieme di arrivo. Applicazioni iniettive, suriettive e biettive. Composizione di funzioni. Applicazioni invertibili. Inversa di una funzione invertibile. Operazioni definite puntualmente tra funzioni reali.

L'anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Principio di identità tra polinomi. Grado di un polinomio. Il polinomio nullo non ha grado definito. Grado della somma e del prodotto di polinomi. Teorema di Ruffini: un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha per radice il numero $\alpha \in \mathbb{R}$ se e solo se $x - \alpha$ è un divisore di $f(x)$. Si dice che la radice α di $f(x)$ ha molteplicità m se e solo se $(x-\alpha)^m$ è un divisore del polinomio $f(x)$ ma $(x-\alpha)^{m+1}$ non è un divisore di $f(x)$. Teorema fondamentale dell'Algebra (di Gauss): ogni polinomio a coefficienti reali di grado n ha esattamente n radici in $\mathbb{C}$, contando le molteplicità. Un polinomio a coefficienti reali di grado n ha al più n radici reali. Test delle radici razionali (di Newton): se un polinomio a coefficienti interi $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ha una radice razionale a/b, allora a è un divisore del termine noto e b è un divisore del coefficiente direttore di $f(x)$. Teorema di d'Alembert: un polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale ed ammette un numero dispari di radici reali, pari al più al suo grado contando le molteplicità; un polinomio a coefficienti reali di grado pari o non ha radici reali oppure ammette un numero pari di radici reali, non superiore al suo grado, contando le molteplicità. Teorema di Harriot-Descartes (regola dei segni di Cartesio): Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio a coefficienti reali non costante e che non ha radici nulle (col termine noto diverso da 0); allora il numero di radici reali positive di $f(x)$ non supera il numero delle variazioni di segno dei coefficienti di $f(x)$ (ordinati secondo le potenze decrescenti della x) ed il numero di radici reali negative di $f(x)$ non supera il numero delle variazioni di segno dei coefficienti di $f(-x)$ (ordinati secondo le potenze decrescenti della x). Se un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha solo radici reali (non nulle), il numero delle radici positive di $f(x)$ è uguale al numero delle variazioni di segno ed il numero delle radici negative di $f(x)$ è uguale al numero delle permanenze di segno dei coefficienti di $f(x)$.

Definizione astratta di gruppo. Esempi di gruppi additivi e moltiplicativi (gruppi numerici, gruppi di matrici, gruppi di funzioni, gruppi di polinomi).

Matrici

L'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti reali. Notazioni e nomenclatura. Vettori riga e vettori colonna. Matrice nulla. L'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali. Matrici diagonali. Matrice identica di ordine n. Trasposta di una matrice. Principio di identità tra matrici. Somma di matrici dello stesso tipo. La struttura $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ è un gruppo abeliano: l'addizione tra matrici è associativa e commutativa, la matrice nulla è l'elemento neutro rispetto alla somma, ogni matrice ha la sua matrice opposta. Moltiplicazione di un numero reale per una matrice: proprietà. L'operazione di trasposizione conserva la somma tra matrici e il prodotto di un numero reale con una matrice. Matrici simmetriche ed antisimmetriche: proprietà. L'unica matrice sia simmetrica che antisimmetrica è la matrice nulla. Teorema di decomposizione unica in parte simmetrica ed antisimmetrica: ogni matrice quadrata può essere scritta in maniera unica come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna. Prodotto riga per colonna di matrici. In generale il prodotto riga per colonna non è commutativo. Proprietà del prodotto riga per colonna. Prese due matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, allora $(AB)^T = B^T A^T$. La matrice identica è l'elemento neutro del prodotto. I prodotti notevoli non valgono in generale per le matrici a causa della non commutatività del prodotto riga per colonna. La legge di annullamento del prodotto non vale per le matrici. Matrici quadrate invertibili. Prese due matrici invertibili A e B, anche la matrice AB è invertibile e si ha che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Il gruppo lineare reale di ordine n delle matrici invertibili, $GL_n(\mathbb{R})$.

Algebra lineare in $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali. Combinazioni lineari di vettori riga e di vettori colonna. Dipendenza lineare e indipendenza lineare in $\mathbb{R}^n$. Un vettore riga (o colonna) è linearmente dipendente se e solo se è nullo. Due vettori riga (o colonna) sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei due è multiplo dell'altro. Se in un insieme di vettori riga (o colonna) uno di essi è il vettore nullo, allora i vettori sono linearmente dipendenti. Se in un insieme di vettori riga (o colonna) due di essi sono uguali, allora i vettori sono linearmente dipendenti. Dei vettori (riga o colonna) sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

Determinanti

Determinanti di matrici quadrate di ordine 1 e 2. Sottomatrici complementari. Complementi algebrici. Determinante di una matrice di ordine qualsiasi. Sviluppo del determinante rispetto alla prima riga. Teorema di Laplace: il determinante di una matrice può essere calcolato sviluppandolo rispetto ad una qualsiasi riga o una qualsiasi colonna. Proprietà dei determinanti: $\det(0_n) = 0$, $\det(I_n) = 1$ e $\det(A^T) = \det(A)$. Se una matrice ha una riga (o una colonna) nulla, il suo determinante è zero. Il determinante di una matrice diagonale o triangolare è il prodotto degli elementi che sono sulla diagonale. Se in una matrice si moltiplica una riga (o una colonna) per uno scalare, il determinante della matrice resta moltiplicato per lo stesso scalare. Il determinante è lineare per righe (o per colonne). Il determinante non si distribuisce rispetto alla somma di matrici. Scambiando due righe (o due colonne) in una matrice, il determinante cambia segno. Se una matrice ha due righe uguali (o due colonne uguali), il suo determinante è nullo. Se una matrice ha due righe (o due colonne) proporzionali, il suo determinante è nullo. Sommando ad una riga (o una colonna) di una matrice una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia. Se in una matrice le righe (o le colonne) sono linearmente dipendenti, il determinante è nullo. Teorema di Binet: prese A e B due matrici quadrate dello stesso ordine, allora $\det(AB) = \det A \, \det B$. Calcolo di determinanti di ordine 3 con la regola di Sarrus. Matrici invertibili. Teorema della matrice inversa: una matrice è invertibile se e solo se ha determinante diverso da zero. In particolare, l'inversa di una matrice è data da $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^T$, dove A^* è la matrice aggiunta di A (la matrice che ha per entrate, ordinatamente, i complementi algebrici degli elementi della matrice A).

Rango

Rango di una matrice. Una matrice ha rango zero se e solo se è la matrice nulla. Sottomatrici e minori di una matrice quadrata. Il rango di una matrice A vale r se e solo se la matrice contiene un minore non nullo di ordine r e tutti i minori di A di ordine $r+1$ sono nulli. Minori orlati. Teorema di Kronecker per i minori orlati: il rango di una matrice vale r se e solo se la matrice contiene un minore non nullo di ordine r e tutti i suoi orlati di ordine $r+1$ sono nulli. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo. Teorema di Kronecker per il rango del prodotto di matrici: se A e B sono due matrici allora $\mathrm{rk}AB \leqslant \min\{\mathrm{rk}A,\ \mathrm{rk}B\}$. Se si moltiplica una matrice A a destra o a sinistra per una matrice invertibile, allora il rango di A resta invariato. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

Sistemi di equazioni lineari

Equazioni lineari in una o più incognite. Equazioni lineari determinate, indeterminate e impossibili. Soluzione di un'equazione lineare. Sistemi lineari di tipo $m \times n$ a coefficienti reali (con m equazioni ed n incognite). Soluzione di un sistema lineare. Sistemi determinati, indeterminati, impossibili. Scrittura compatta di un sistema lineare: un sistema lineare si scrive nella forma $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ è la colonna dei termini noti e $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

la colonna delle indeterminate. Sistemi omogenei. Un sistema omogeneo non è mai impossibile, ammette sempre la soluzione banale; inoltre, se ammette una soluzione non banale, ne ammette infinite. Le soluzioni di un sistema non omogeneo sono date dalla somma di una (data) soluzione particolare e di una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato. Un sistema lineare ammette una, nessuna o infinite soluzioni. Sistemi lineari quadrati di ordine n. Sistemi lineari crameriani.

Teorema di Cramer: un sistema lineare quadrato con matrice dei coefficienti A è determinato se e solo se $\det A \neq 0$. Risoluzione di un sistema crameriano col metodo della matrice inversa. Regola di Cramer per la risoluzione di un sistema crameriano. Un sistema lineare omogeneo quadrato con matrice dei coefficienti A è indeterminato se e solo se $\det A = 0$. Una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se le colonne (o le righe) di A sono linearmente indipendenti. Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ha rango r se e solo se in A esistono r righe (o colonne) linearmente indipendenti e se $r+1$ righe (o colonne) sono linearmente dipendenti. In una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ il rango indica il massimo numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti. Sistemi compatibili ed incompatibili. Teorema di Kronecker-Rouché-Capelli: un sistema lineare $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ è compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta del sistema A e il rango della matrice completa del sistema $(A|\mathbf{b})$ sono uguali. In tal caso, detto il rango r, il sistema è determinato se $n = r$, è invece indeterminato con ∞^{n-r} soluzioni se $r < n$. Un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ contiene al più n vettori linearmente indipendenti. Presi n vettori di $\mathbb{R}^n$, questi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice che li ha per righe (o colonne) ha determinante non nullo.

Spazi vettoriali

Spazi vettoriali reali. Esempi di spazi vettoriali: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$. Frecce orientate. Un vettore applicato è individuato da un punto di applicazione, una direzione, un verso ed un modulo. L'insieme dei vettori geometrici applicati nel piano. Operazioni con i vettori geometrici: somma e moltiplicazione con scalare reale. Vettore nullo. Vettori equipollenti. Vettori geometrici liberi. Lo spazio vettoriale reale dei vettori geometrici liberi: $\mathcal{V}^2$. Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[x]$. Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^X$ delle funzioni a valori reali con dominio X. In uno spazio vettoriale V il vettore nullo $\mathbf{0}_V$ è unico; il simmetrico di un vettore $v \in V$ è unico e lo si indica con $-v$ ed è detto l'opposto di v. Legge di annullamento del prodotto negli spazi vettoriali: presi $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, si ha che $\lambda v = \mathbf{0}_V$ se e solo se $\lambda = 0_{\mathbb{R}}$ oppure $v = \mathbf{0}_V$. Preso un vettore v di uno spazio vettoriale V, si ha che $(-1)v = -v$. Combinazioni lineari. Vettori linearmente dipendenti e linearmente indipendenti. Un vettore è linearmente dipendente se e solo se è nullo. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali. Dei vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se in un insieme di vettori alcuni di essi sono linearmente dipendenti, allora tutti sono linearmente dipendenti.

Sottospazi vettoriali

Sottospazi vettoriali. Dato lo spazio vettoriale V, gli insiemi $\{\mathbf{0}_V\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V. Un sottospazio vettoriale contiene necessariamente il vettore nullo. Esempi di sottospazi vettoriali: matrici quadrate simmetriche, antisimmetriche e diagonali. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di tipo $m \times n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema è omogeneo. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1,\ v_2, \dots, v_n$ vettori di V, allora il sottoinsieme delle combinazioni lineari dei v_i è un sottospazio vettoriale di V; esso è chiamato il sottospazio generato dai v_i ed è indicato con $\mathcal{L}(v_1,\ v_2, \dots, v_n)$. Retta vettoriale e piano vettoriale. L'insieme $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ dei polinomi di grado al più n con il polinomio nullo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Spazi vettoriali finitamente generati. Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato. Gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ sono finitamente generati. Dato V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori di V, preso $w \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, allora si ha $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n, w) = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Similmente, se $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, allora $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Dati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearmente indipendenti di V, preso $w \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, allora i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n, w$ sono linearmente indipendenti.

Basi e dimensione

Una base di uno spazio vettoriale finitamente generato è un sistema di generatori linearmente indipendenti. Basi canoniche di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V se e solo se ogni vettore di V si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$. Le due condizioni per definire una base sono indipendenti (e vanno verificate entrambe). Metodo degli scarti successivi: ogni spazio vettoriale non banale finitamente generato ha almeno una base. Dato uno spazio vettoriale non finitamente generato V, i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ costituiscono una base di V se sono generatori di V e comunque scelti un numero finito tra di essi, questi risultano linearmente indipendenti. Una base di $\mathbb{R}[x]$ è data $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Lemma di Steinitz: se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V e $w_1, w_2, \dots, w_m$ sono $m > n$ vettori di V allora i w_i sono linearmente dipendenti. Lemma di scambio: se in una base si sostituisce un vettore con la somma di questo vettore più una combinazione lineare dei vettori rimanenti, si ottiene una nuova base. Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità che è detta la dimensione di V e si indica $\dim V$. La dimensione di V indica il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare in V. La dimensione di V indica il numero minimo di generatori di V. Teorema del completamento della base: sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, w_2, \dots, w_m$, con $m < n$, vettori linearmente indipendenti di V; allora è possibile scegliere $n - m$ vettori $v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-m}$ tra i v_i tali che $\{w_1, w_2, \dots, w_m, v'_1, \dots, v'_{n-m}\}$ sia una base di V. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, allora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, se e solo se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono generatori di V. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Operazioni tra vettori in termini delle loro coordinate rispetto ad una base. Siano $w_1, w_2, \dots, w_m$ vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia $\mathcal{B}$ una base di V, sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice che ha per righe (o per colonne) le coordinate dei w_i rispetto a $\mathcal{B}$, allora $\mathrm{rk}A = r$ indica il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra i w_i ed r vettori linearmente indipendenti sono quelli corrispondenti alle righe di un qualsiasi minore non nullo di A di ordine r; inoltre, i w_i sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathrm{rk}A = m$. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita; la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è la matrice che si ottiene scrivendo in colonna ordinatamente le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ in funzione di quelli di $\mathcal{B}$. Teorema del cambiamento di coordinate nel passaggio da una base ad un'altra: siano P la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, P' la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$, X la colonna delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e X' la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora si ha che $P' = P^{-1}$, $X' = P^{-1}X$ e infine $X = PX'$.

Somma e intersezione di sottospazi

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e W è un sottospazio di V allora $\dim W \leqslant \dim V$. Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$. Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio vettoriale. Il numero di parametri necessari per dare le equazioni parametriche di W è uguale alla dimensione di W. Se $n = \dim V$, il numero di equazioni cartesiane necessarie per descrivere W è detto codimensione di W e $\mathrm{codim} W = n - \dim W$. In particolare, per ogni sottospazio vettoriale W si ha $n = \dim W + \mathrm{codim} W$. L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale. In generale, l'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale. La somma di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo contenente l'unione dei due sottospazi. Un sistema di generatori per la somma dei sottospazi U e W è dato dall'unione di una base di U e una base di W; per ottenere una base va poi applicato il metodo degli scarti successivi. Equazioni cartesiane di $U \cap W$ sono date dal sistema contenente equazioni cartesiane di U e di W. Teorema di Grassmann: se U e W sono sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale, allora vale la formula di Grassmann $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$. Dati due sottospazi U e W si ha che $U + W = U$ se e solo se $U \cap W = W$ se e solo se $W \subseteq U$. Somma diretta di due sottospazi. Formula di Grassmann per la somma diretta: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$. Sottospazi complementari. In uno spazio vettoriale finitamente generato ogni sottospazio ammette un complemento diretto (che non è unico in generale). Teorema della somma diretta: dati U e W sottospazi vettoriali, si ha che U e W sono a somma diretta se e solo se ogni vettore di $U + W$ si scrive in maniera unica come somma di un vettore di U e di un vettore di W. Siano T, U e W sottospazi vettoriali, siano $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base di U e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_l\}$ una base di W, allora $T = U \oplus W$ se e solo se $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_l\}$ è una base di T. Somma e somma diretta di un numero finito di sottospazi.

Geometria del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Richiami di geometria euclidea, proprietà del piano euclideo, quinto postulato di Euclide. Prima proprietà fondamentale degli spazi affini: dato un vettore $\overrightarrow{AB}$ ed un punto C, esiste ed è unico il punto D tale che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equipollenti. Seconda proprietà fondamentale degli spazi affini:

presi tre punti O, P, Q si ha $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, detta identità di Chasles. Sistemi di riferimento affine nel piano. Coordinate affini di punti e vettori nel piano. Operazioni tra vettori in termini di coordinate. Presi due punti del piano A e B, le coordinate del vettore $\overrightarrow{AB}$ sono date dalla differenza delle coordinate del punto finale B meno quelle del punto di applicazione A; più in generale si ha che $\overrightarrow{AB} = v$ se e solo se $B = A + v$. Una retta nel piano è univocamente individuata da un suo punto e da un vettore ad essa parallelo. Vettore direzionale e parametri direttori di una retta. Equazione vettoriale di una retta: data una retta r, un punto $P_0 \in r$ ed un vettore direzionale v di r, allora un punto P del piano appartiene ad r se e solo se $\overrightarrow{P_0P} = t\,v$, per qualche $t \in \mathbb{R}$. Equazioni parametriche di una retta: data una retta r, un punto $P_0(x_0, y_0) \in r$ ed un vettore direzionale $v(l, m)$ di r, allora equazioni parametriche di r sono date da $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t. \end{cases}$ Equazione cartesiana di una retta: una retta nel piano è rappresentata da un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, con a e b non contemporaneamente nulli, e viceversa, ogni equazione di questo tipo ha per grafico nel piano una retta. La retta di equazione $ax + by + c = 0$ ha per vettore direzionale il vettore $(-b, a)$. Dati $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti distinti del piano, la retta che li congiunge ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases}$ ed equazione cartesiana data da $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$ Condizione di allineamento di tre punti. Rette parallele, rette coincidenti, rette parallele e distinte, rette incidenti. Posizione reciproca di due rette nel piano: siano date due rette $r:\ ax + by + c = 0$ e $r':\ a'x + b'y + c' = 0$, allora $r \| r'$ se e solo se $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$; in particolare sono parallele e coincidenti se e solo se $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$, sono parallele e distinte se e solo se $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ e $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$; infine r ed r' sono incidenti se e solo se $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$. Data la retta $r:\ ax + by + c = 0$, un vettore direzionale di r è il vettore $v_r = (-b,\, a)$.

Geometria dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

Vettori geometrici nello spazio. L'insieme $\mathcal{V}^3$ dei vettori liberi dello spazio fisico è uno spazio vettoriale con le usuali operazioni tra frecce orientate. Richiami sulle proprietà elementari dello spazio euclideo tridimensionale. Punti allineati e punti complanari. Vettori allineati e vettori complanari. Tre vettori di $\mathcal{V}^3$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari. Lo spazio $\mathcal{V}^3_O$ ha dimensione tre. Lo spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Sistema di riferimento affine e coordinate affini nello spazio. Coordinate di vettori liberi ed applicati. Identità di Chasles nello spazio. Equazione vettoriale di una retta: data una retta r, un punto $P_0 \in r$ ed un vettore direzionale v di r, allora un punto P del piano appartiene ad r se e solo se $\overrightarrow{P_0P} = t\,v$, per qualche $t \in \mathbb{R}$. Equazioni parametriche di una retta: una retta parallela al vettore $v = (l, m, n)$ e passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t. \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$ Condizioni operative per l'allineamento di tre punti e per la complanarità di quattro punti. Equazione vettoriale di un piano: dato un piano π, un punto $P_0 \in \pi$ e due vettori non linearmente indipendenti v e w paralleli a π, allora un punto P appartiene a π se e solo se $\overrightarrow{P_0P} = t\,v + t'\,w$, per qualche $t, t' \in \mathbb{R}$. Equazioni parametriche di un piano: il piano parallelo ai vettori $v = (l, m, n)$ e $w = (l', m', n')$ e passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + l\,t + l\,t' \\ y = y_0 + m\,t + m\,t'. \\ z = z_0 + n\,t + n\,t' \end{cases}$ Siano dati $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ tre punti non allineati dello spazio; il piano che li contiene ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t + (x_3 - x_1)\,t' \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t + (y_3 - y_1)\,t'. \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t + (z_3 - z_1)\,t' \end{cases}$ Due rette sono parallele se e solo se hanno vettori direzionali proporzionali. Rette parallele sono complanari. Rette incidenti sono complanari.

Equazioni parametriche del piano parallelo a due rette date e passante per un punto dato. Tutti e soli i piani dello spazio sono rappresentati da un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c non contemporaneamente nulli. Rappresentazione grafica di piani. Piani coincidenti, piani paralleli e distinti, piani incidenti. Teorema di classificazione delle posizioni reciproche di due piani nello spazio: siano dati due piani $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$ e $\pi': \ a'x + b'y + c'z + d' = 0$; allora π e π' sono paralleli e distinti se e solo se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ e $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$; π e π' sono coincidenti se e solo se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1$; π e π' sono incidenti se e solo se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio: tutte e sole le rette dello spazio sono definite da un sistema lineare di due equazioni in tre indeterminate del tipo $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$ con $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$. Teorema di classificazione delle posizioni reciproche tra retta e piano nello spazio: dati un piano $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$ ed una retta $r: \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases}$ si ha che r e π sono propriamente paralleli se e solo se $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$ e $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$; si ha che $r \subset \pi$ se e solo se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$; risulta che r e π sono incidenti (in un solo punto) se e solo se $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \neq 0$. I piani paralleli in senso lato si distinguono in piani (propriamente) paralleli e piani (paralleli e) coincidenti. Dato il piano $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$, il vettore $v = (a, b, c)$ è detto vettore di giacitura di π e i coefficienti a, b, c sono detti parametri giacitura di π. Piani paralleli hanno, a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, gli stessi parametri di giacitura. Parametri direttori di una retta in termini dei minori di ordine due della matrice incompleta del sistema che la definisce. Un piano di giacitura (a, b, c) ed una retta di parametri direttori (l, m, n) sono paralleli se e solo se $al + bm + cn = 0$. Rette sghembe. Teorema di classificazione delle posizioni reciproche di due rette nello spazio: date due rette $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$ e prese le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$, si ha che r e s sono sghembe se e solo se $\det B \neq 0$, r e s sono incidenti se e solo se $\mathrm{rk}B = \mathrm{rk}A = 3$, r e s sono parallele se e solo se $\mathrm{rk}B = 3$ e $\mathrm{rk}A = 2$, r e s sono coincidenti se e solo se $\mathrm{rk}B = 2$.

Applicazioni lineari

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Un'applicazione lineare $F: \ V \to W$ è tale che $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ e $F(-v) = -F(v)$, per ogni $v \in V$. Le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari: data un'applicazione lineare $F: \ V \to W$ e il vettore $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, allora $F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_k F(v_k)$. Due applicazioni lineari sono uguali se e solo se assumono gli stessi valori sui vettori di una base dello spazio di partenza. Teorema di estensione: dati gli spazi vettoriali V e W, con V finitamente generato, presi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ un sottinsieme di vettori qualsiasi di W, allora esiste ed è unica l'applicazione lineare $F: V \to W$ tale che $F(v_1) = w_1, \ldots, F(v_n) = w_n$. Insieme immagine di un'applicazione lineare. Se $F: \ V \to W$ è un'applicazione lineare, allora $\mathrm{Im}F$ è un sottospazio vettoriale di W; inoltre se V è finitamente generato ed ha dimensione n allora $\dim \mathrm{Im}F \leqslant n$ e se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, allora $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}F$. L'immagine diretta di un sottospazio del dominio sotto un'applicazione lineare è un sottospazio dell'insieme d'arrivo. Controimmagine di un vettore. In generale la controimmagine di un vettore non è un sottospazio vettoriale del dominio. Nucleo di un'applicazione lineare. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è banale. Teorema del rango: siano V e W spazi vettoriali, con V finitamente generato, e sia $F: \ V \to W$ un'applicazione lineare, allora vale la formula della dimensione: $\dim V = \dim \operatorname{Im}(F) + \dim \operatorname{Ker}(F)$. Omomorfismi, endomorfismi, automorfismi di spazi vettoriali. Data l'applicazione lineare $F: V \to W$ tra due spazi vettoriali finitamente generati, si ha che F è iniettiva se e solo se $\dim \operatorname{Im} F = \dim V$, F è suriettiva se e solo se $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$, infine F è biettiva se e solo se $\dim \operatorname{Im} F = \dim W = \dim W$. Sia $F: V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\dim V = \dim W$, allora F è iniettiva se e solo se F è suriettiva, se e solo se F è biettiva. Sia $F: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, se $\dim V > \dim W$ allora F non può essere iniettiva, se invece $\dim W > \dim V$ allora F non può essere suriettiva. Matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a due basi. Formule di calcolo in termini di coordinate e matrice associata. Sia data un'applicazione lineare $F: V \to W$ e sia A una matrice associata ad F, allora $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} F = \dim \operatorname{Im} F = \operatorname{rk} A$. Sia data l'applicazione lineare $F: V \to W$ tra due spazi vettoriali finitamente generati e sia A una matrice associata ad F, si ha che F è iniettiva se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim V$, F è suriettiva se e solo se $\operatorname{rk} A = \dim W$. Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Tutti gli spazi vettoriali di dimensione n sono isomorfi ad $\mathbb{R}^n$. Considerazioni sul significato del concetto di isomorfismo. Equazioni di una applicazione lineare ed equazione matriciale. Composizione di applicazioni. La composizione di applicazioni lineari è un'applicazione lineare. Teorema di composizione operatoria: date le applicazioni tra spazi vettoriali f.g. $F: V \to W$ e $G: W \to U$ con matrici associate rispettivamente A e B, allora l'applicazione $G \circ F: V \to U$ ha come matrice associata la matrice BA. Date le applicazioni tra spazi vettoriali f.g. $F: V \to W$ e $G: W \to U$ allora si ha $\dim \operatorname{Im}(G \circ F) \leqslant \min\{\dim \operatorname{Im} G, \dim \operatorname{Im} F\}$. Legge di cambiamento della matrice associata ad una applicazione lineare: sia $F: V \to W$ un applicazione lineare tra due spazi vettoriali f.g., siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V con matrice di passaggio P e siano $\overline{\mathcal{B}}$ e $\overline{\mathcal{B}'}$ due basi di W con matrice di passaggio Q, siano poi A la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ ed A' la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\overline{\mathcal{B}'}$, allora si ha $A' = Q^{-1}AP$. Le matrici associate ad una applicazione lineare hanno tutte lo stesso rango (che coincide con la dimensione dell'immagine). Un'applicazione lineare F tra due spazi vettoriali f.g. è invertibile se e solo se le matrici associate ad F sono invertibili; in particolare la matrice di F^{-1} è l'inversa della matrice di F (a patto di usare le stesse basi).

Diagonalizzazione di applicazioni lineari

Matrici associate ad un endomorfismo. Matrici simili. Le matrici associate ad un endomorfismo sono simili tra loro, hanno lo stesso rango e lo stesso determinante. Un endomorfismo è automorfismo se e solo se tutte le sue matrici associate sono invertibili. Introduzione alla diagonalizzazione: motivazione e applicazioni. Autovalori e autovettori di un endomorfismo. Autospazi. Gli autospazi di un endomorfismo sono sottospazi vettoriali di dimensione maggiore o uguale a 1. Autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Gli autospazi (associati ad autovalori distinti) di un endomorfismo sono a somma diretta. Un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n ha al più n autovalori distinti. Ricerca di autovalori e autovettori. Un numero reale λ è autovalore per un endomorfismo F se e solo verifica l'equazione $\det(A - \lambda I_n) = 0$, dove A è una matrice associata ad F. Un vettore con coordinate $X \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore per F associato all'autovalore λ se e solo se le sue coordinate risolvono il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n)X = \mathbf{0}$. Matrice caratteristica. Polinomio caratteristico. Equazione caratteristica o (equazione secolare di Laplace). Teorema di invarianza del polinomio caratteristico: il polinomio caratteristico di un endomorfismo F non dipende dalla matrice di F scelta per calcolarlo. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Un endomorfismo non è invertibile se e solo se ammette l'autovalore nullo, in particolare l'autospazio associato a 0 coincide con il nucleo dell'endomorfismo. Un endomorfismo F di uno spazio vettoriale f.g. V è diagonalizzabile se e solo se V ammette una base costituita da autovettori per F. Molteplicità algebrica m.a.(λ) e molteplicità geometrica m.g.(λ) di un autovalore λ. Un endomorfismo diagonalizzabile ha autovalori tutti reali (non necessariamente distinti). Se λ è un autovalore di un endomorfismo allora $1 \leqslant$ m.g.$(\lambda) \leqslant$ m.a.(λ). Teorema fondamentale della diagonalizzabilità: un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è diagonalizzabile se e solo se ammette autovalori tutti reali e per ciascuno di questi molteplicità geometrica e molteplicità algebrica coincidono. Se un endomorfismo ammette autovalori tutti reali e distinti allora è diagonalizzabile. Diagonalizzabilità di matrici. Polinomio caratteristico, autovalori, autovettori, autospazi di una matrice quadrata. Una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se essa è simile ad una matrice diagonale.

Forme bilineari e quadratiche

Forme bilineari su uno spazio vettoriale reale. Forma bilineare nulla. Una forma bilineare b su uno spazio vettoriale V è detta simmetrica se per ogni $v, w \in V$ si ha che $b(v,w) = b(w,v)$. Una forma bilineare b su uno spazio vettoriale V è antisimmetrica se e solo se per ogni $v, w \in V$ si ha che $b(v,w) = -b(w,v)$, se e solo $b(v,v) = 0$. La forma nulla è l'unica forma sia simmetrica che antisimmetrica. Il determinante delle matrici quadrate di ordine 2 è una forma bilineare antisimmetrica su $\mathbb{R}^2$. Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è una forma bilineare simmetrica. Il prodotto tra numeri reali è una forma bilineare simmetrica (commutativa) su $\mathbb{R}$. Matrice di Gram associata ad una forma bilineare rispetto ad una base. Formule di calcolo in termini di coordinate e matrice associata. Una forma bilineare è simmetrica (risp. antisimmetrica) se e solo se la matrice associata è simmetrica (risp. antisimmetrica). Legge di cambiamento della matrice associata ad una forma bilineare: sia b una forma bilineare su uno spazio f.g. V, siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V con matrice di passaggio P, siano poi A la matrice associata a b rispetto a $\mathcal{B}$ e A' la matrice associata a b rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora si ha $A' = P^T A P$. Matrici congruenti. Le matrici associate ad una stessa forma bilineare sono congruenti tra loro. Rango di una forma bilineare. Forme degeneri e non. Le matrici associate ad una stessa forma bilineare hanno tutte lo stesso rango. La simmetria e l'antisimmetria sono invarianti per congruenza. Il segno del determinante di una matrice è invariante per congruenza. Quadrato di binomio generalizzato. Una forma bilineare b su uno spazio V è degenere se e solo esiste un vettore non nullo v tale che $b(v,w) = 0$, per ogni $w \in V$, se e solo esiste un vettore non nullo v tale che $b(w,v) = 0$, per ogni $w \in V$. Due vettori v e w si dicono ortogonali secondo una forma bilineare simmetrica b se $b(v,w) = 0$ e si scrive $v \perp w$. Il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori dello spazio. Vettori isotropi (ortogonali a sé stessi). Cono isotropo di una forma bilineare simmetrica. L'insieme dei vettori isotropi non è in generale un sottospazio vettoriale, contiene il vettore nullo ed è unione di rette. Il sottoinsieme ortogonale $S^\perp$ ad un insieme di vettori $S \subset V$ è costituito da tutti i vettori di V ortogonali a tutti i vettori di S. Il sottospazio ortogonale è un sottospazio vettoriale. Il sottospazio ortogonale $W^\perp$ di un sottospazio W f.g. è il sottospazio dei vettori ortogonali a tutti i vettori di una base di W. Esempi di calcolo di sottospazi ortogonali. Teorema di Fourier: dato un vettore non isotropo $v \in V$, si ha che $V = v^\perp \oplus \mathcal{L}(v)$. Coefficiente di Fourier di w secondo un vettore non isotropo v: $\frac{b(v,w)}{b(v,v)}$.

Basi ortogonali e basi diagonalizzanti. Teorema di Gauss-Lagrange: Una forma bilineare è diagonalizzabile (rispetto ad una base ortogonale) se e solo se è simmetrica. Forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica. Forma quadratica nulla. Forma quadratica standard. Le forme quadratiche sono funzioni omogenee di secondo grado. Forma (bilineare) polare di una forma quadratica. Formula di polarizzazione: data una forma quadratica Q su uno spazio vettoriale V, la forma bilineare polare di Q è data da $b(v,w) = \frac{1}{2}[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)]$, per ogni $v, w \in V$. Matrice asssociata ad una forma quadratica. Regole di calcolo in termini di matrice associata. Forme quadratiche diagonali. Diagonalizzazione di forme quadratiche. Legge di inerzia di Sylvester: data una forma quadratica Q di rango r su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, esistono un numero intero positivo p ed una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V rispetto a cui la forma Q ha l'espressione $Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$; inoltre il numero p è indipendente dalla base scelta e dipende solo dalla forma Q. Forma canonica di Sylvester di una forma quadratica. Basi di Sylvester. Indice di positività, indice di negatività, segnatura di una forma quadratica. Forme quadratiche (e forme bilineari simmetriche) definite positive, semidefinite positive, definite negative, semidefinite negative, indefinite. Forme quadratiche canoniche su $\mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}^3$. Teorema degli zeri per le forme quadratiche: se una forma quadratica Q assume valore positivo su un vettore v e valore negativo su un vettore w, allora esiste un vettore isotropo non banale per Q. Matrici simmetriche definite positive, semidefinite positive, definite negative, semidefinite negative, indefinite. Tutte le matrici simmetriche definite positive di ordine n sono congruenti alla matrice identica. Una matrice simmetrica A è definita positiva se e solo se esiste una matrice invertibile M tale che $A = M^T M$. Minori principali di una matrice quadrata. Teorema di Jacobi-Sylvester (criterio dei minori principali): una matrice simmetrica è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono strettamente positivi.

Spazi vettoriali euclidei

Prodotti scalari. Spazi vettoriali euclidei. Prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Norma (o lunghezza) di un vettore, $\| v \| = \sqrt{v \cdot v}$. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz: dati due vettori v e w si ha che $|v \cdot w| \leqslant \| v \| \| w \|$. Proprietà della norma: la norma assume sempre valori positivi ed è nulla solo per il vettore nullo; la norma è positivamente omogenea di grado 1. Diseguaglianza triangolare. Angolo (convesso) compreso tra due vettori non nulli. Detto θ l'angolo compreso tra due vettori non nulli v e w, si ha che $v \cdot w = \| v \| \| w \| \cos\theta$. Teorema di Pitagora. Teorema di Carnot. Versori. Normalizzazione di vettori. Basi ortogonali. Basi ortonormali. Vettori non nulli e a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti. Normalizzando i vettori di una base ortogonale si ottiene una base ortonormale. Procedimento ortogonale di Gram-Schmidt. Interpretazione geometrica del coefficiente di Fourier e del procedimento ortogonale di G.-S. Complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale. Teorema di decomposizione ortogonale: dato un sottospazio vettoriale non nullo $W \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta che $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$; in particolare si ha che $\dim W^\perp = n - \dim W$. Proiezione ortogonale di vettori su un sottospazio.

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Il prodotto vettoriale è bilineare anticommutativo. Il prodotto vettoriale di due vettori è nullo se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti. Prodotto misto di tre vettori. Il prodotto misto è lineare rispetto ai suoi argomenti e cambia segno per ogni scambio dei vettori che si moltiplicano. Il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale ad entrambi i fattori. Dati due vettori v e w di $\mathbb{R}^3$, si ha che $\| v \wedge w \|^2 = \| v \|^2 \| w \|^2 - (v \cdot w)^2$. Dati due vettori linearmente indipendenti v e w, si ha che $\{v, w, v \wedge w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Siano dati due vettori non nulli v e w in $\mathbb{R}^3$ e sia $v = a + b$ con a parallelo a w e b perpendicolare a w, allora $\| v \wedge w \| = \| b \| \| w \|$. Il modulo del prodotto vettoriale di due vettori eguaglia l'area del parallelogramma sotteso dai due vettori. Dati tre punti nello spazio A, B, C, l'area del triangolo ABC è data da $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Il prodotto misto di tre vettori nello spazio dà il volume del parallelepipedo sotteso ai tre vettori.

Matrici ortogonali. Una matrice ortogonale è invertibile. Una matrice di ordine n è ortogonale se e solo se le sue righe (colonne) sono una base di ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Le matrici ortogonali hanno determinante uguale a ± 1. Siano $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}'$ un'altra base di $\mathbb{R}^n$ e sia P la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$; allora la base $\mathcal{B}'$ è ortonormale se e solo se P è una matrice ortogonale. Un endomorfismo F di $\mathbb{R}^n$ è detto (operatore) unitario o ortogonale se conserva il prodotto scalare dei vettori, ovvero se per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha che $F(v) \cdot F(w) = v \cdot w$. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo, allora F è ortogonale se e solo se conserva la norma (cioè $\| F(v) \| = \| v \|$, per ogni vettore v), se e solo se F trasforma basi ortonormali in basi ortonormali, se e solo se la matrice associata ad F rispetto ad una base ortonormale è una matrice ortogonale. Gli operatori ortogonali sono invertibili. Se λ è un autovalore di un operatore ortogonale, allora si ha $\lambda = \pm 1$.

Endomorfismi simmetrici di $\mathbb{R}^n$. Siano dati due endomorfismi F e G di $\mathbb{R}^n$ tali che $F(v) \cdot w = v \cdot G(w)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora la matrice canonica di F è la trasposta della matrice canonica di G. Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è simmetrico se e solo se la sua matrice rispetto alla base canonica (o qualsiasi base ortonormale) è una matrice simmetrica. L'operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio è un endomorfismo simmetrico. Autovettori associati ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali. Un endomorfismo simmetrico trasforma vettori ortogonali ad un autovettore in vettori ortogonali allo stesso autovettore. Teorema spettrale: motivazione. Tereoma spettrale (per endomorfismi simmetrici): Ogni endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori. Teorema spettrale (per matrici simmetriche): Ogni matrice simmetrica è sia simile che congruente ad una matrice diagonale, ovvero per ogni matrice simmetrica A esistono una matrice diagonale D ed una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM = M^T AM$. Se una matrice simmetrica A di ordine n ha r autovalori non nulli di cui p positivi ed $r - p$ negativi, allora la matrice A ha rango r e segnatura $\mathrm{sgn}(A) = (p, r - p)$. Una matrice simmetrica di rango massimo ha segnatura (p, q) se e solo se nel suo polinomio caratteristico ci sono p variazioni di segno e q permanenze di segno.

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Il prodotto vettoriale è bilineare anticommutativo. Il prodotto vettoriale di due vettori è nullo se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti. Prodotto misto di tre vettori. Il prodotto misto è lineare rispetto ai suoi argomenti e cambia segno per ogni scambio dei vettori che si moltiplicano. Il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale ad entrambi i fattori. Dati due vettori v e w di $\mathbb{R}^3$, si ha che $\| v \wedge w \|^2 = \| v \|^2 \| w \|^2 - (v \cdot w)^2$. Dati due vettori linearmente indipendenti v e w, si ha che $\{v, w, v \wedge w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Siano dati due vettori non nulli v e w in $\mathbb{R}^3$ e sia $v = a + b$ con a parallelo a w e b perpendicolare a w, allora $\| v \wedge w \| = \| b \| \| w \|$. Il modulo del prodotto vettoriale di due vettori eguaglia l'area del parallelogramma sotteso dai due vettori. Dati tre punti nello spazio A, B, C, l'area del triangolo ABC è data da $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Il prodotto misto di tre vettori nello spazio dà il volume del parallelepipedo sotteso ai tre vettori.

Piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$

Piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. Sistemi di riferimento cartesiano nel piano euclideo. Distanza tra due punti. Versore normale ad una retta. Costruzione di un sistema di riferimento cartesiano associato ad una retta. Angolo (convesso) tra due rette incidenti. Due rette sono ortogonali se e solo se i loro vettori direzionali sono ortogonali. Dati un punto $P(x_0, y_0)$ e la retta $r: \ ax + by + c = 0$, la distanza di P da r vale $d(P, r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Distanza tra rette parallele nel piano. Circonferenza nel piano. Posizione reciproca tra retta e circonferenza.

Spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

Spazio euclideo tridimensionale. Sistema di riferimento cartesiano. Distanza tra due punti. Dato il piano $ax + by + cz + d = 0$, il vettore di giacitura di π, $v_\pi = (a, b, c)$, è ortogonale al piano π. Data una retta r di vettore direzionale v_r ed un piano π di giacitura v_π, si ha che r è parallela a π se e solo se v_r e v_π sono ortogonali, r è ortogonale a π se e solo se v_r e v_π sono paralleli (proporzionali). Due piani sono perpendicolari se e solo se lo sono le loro giaciture. Distanza di un punto da un piano: dati un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e il piano $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$, la distanza di P da π vale $d(P, \pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Distanza di un punto da una retta. Distanza di una retta da un piano. Distanza tra due piani. Distanza tra due rette parallele o incidenti. Proiezione ortogonale di un punto su un piano, di un punto su una retta e di una retta su un piano. Teorema della perpendicolare comune: Date due rette sghembe r ed s, esiste ed è unica la retta r' perpendicolare sia ad r che ad s ed incidente sia r che s, inoltre la distanza tra i due punti di incidenza dà la distanza tra le due rette sghembe. Sfere nello spazio. Circonferenze nello spazio. Calcolo del centro e del raggio di una circonferenza nello spazio. Sfera per quattro punti non complanari nello spazio. Circonferenza passante per tre punti non allineati nello spazio.

Trasformazioni del piano

Una trasformazione (lineare) del piano affine è un'applicazione $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che per ogni punto $P(x, y)$ si abbia $f(x, y) = (ax + by + c, \ a'x + b'y + c')$; inoltre ad una trasformazione lineare si associa la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ ed il vettore $v = (c, c')$. Una trasformazione costante del tipo $f(x, y) = (x_0, y_0)$ fa implodere tutto il piano nel punto (x_0, y_0). La trasformazione identica $f(x, y) = (x, y)$ lascia fissi tutti i punti, ha matrice associata identica e vettore associato nullo. Una traslazione è di tipo $f(x, y) = (x + c, \ y + c')$, ha matrice associata identica e vettore associato (c, c'). Proiezione sull'asse x: $\Pi_x(x, y) = (x, 0)$. Rotazione attorno all'origine di un angolo ϑ: $\rho_\vartheta(x, y) = (\cos\vartheta\, x - \sin\vartheta\, y; \ \sin\vartheta\, x + \cos\vartheta\, y)$. Dilatazioni. Simmetria centrale rispetto ad un punto $C = (x_C, y_C)$: $\sigma_C(x, y) = (2x_C - x, \ 2y_C - y)$. La simmetria centrale rispetto a C è una rotazione di 180° attorno al punto C. Simmetria rispetto all'asse x: $\sigma_x(x, y) = (x, -y)$. Interpretazione geometrica di autovalori ed autovettori di omomorfismi di $\mathbb{R}^2$. Un'affinità è una trasformazione lineare del piano con matrice associata invertibile. La composizione di affinità è un'affinità.

Un'isometria è un'affinità con matrice associata ortogonale. Se f è un'isometria, allora conserva le distanze e le lunghezze, cioè $\| \overrightarrow{f(P)f(Q)} \| = \|\overrightarrow{PQ}\|$, per ogni coppia di punti P e Q del piano. La composizione di isometrie è un'isometria. Teorema di Chasles (cenni): le isometrie del piano sono rotazioni e traslazioni, (dette dirette, con determinante uguale ad 1), simmetrie assiali e glissosimmetrie, (dette inverse, con determinante uguale a -1).

Equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano: dati due sistemi di riferimento cartesiani $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, siano $O' = (x_{O'}, y_{O'})$ le coordinate di O' rispetto al primo sistema di riferimento, e sia $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ la matrice (ortogonale) di passaggio dalla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ alla base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, preso un punto P che ha coordinate $P(x, y)$ nel primo sistema di riferimento e $P(x', y')$ nel secondo, si ha che $\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + x_{O'} \\ y = m_{21}x + m_{22}y' + y_{O'} \end{cases}$ e $\begin{cases} x' = m_{11}(x - x_{O'}) + m_{21}(y - y_{O'}) \\ y = m_{12}(x - x_{O'}) + m_{22}(y - y'_O). \end{cases}$

Coniche affine ed euclidee

Una conica è un sottoinsieme $\mathscr{C}$ dei punti del piano le cui coordinate verificano un'equazione di secondo grado di tipo: $\mathscr{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$, con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e a_{11}, a_{12}, a_{22} non contemporaneamente nulli. Matrice (simmetrica) associata ad una conica: data la conica $\mathscr{C}$ di equazione come sopra, la matrice associata a $\mathscr{C}$ è la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, in cui $a_{01} = a_{10},\ a_{02} = a_{20},\ a_{21} = a_{12}$. Se A è la matrice associata alla conica $\mathscr{C}$, allora si ha che $\mathscr{C}$ ha equazione: $(1, x, y)A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Rango di una conica. Coniche non degeneri, coniche degeneri, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri. Matrice quadratica e forma quadratica associata ad una conica: $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $Q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$. Tipo di una conica: coniche di tipo ellittico, iperbolico e parabolico. Coniche a centro e coniche senza centro. Sia f un'isometria del piano euclideo, sia $f^{-1}(x, y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, con $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, la trasformazione inversa di f, sia data la matrice $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, allora presa la conica $\mathscr{C}$ con matrice associata A e matrice quadratica Q e dette A' la matrice associata alla trasformata $f(\mathscr{C})$ di $\mathscr{C}$ sotto l'azione di f e Q' la matrice quadratica di $f(\mathscr{C})$, si ha che $\lambda A' = \overline{M}^T A \overline{M}$ e $\lambda Q' = M^T Q M$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo. Teorema di invarianza: data una conica $\mathscr{C}$ con matrice associata A e matrice quadratica Q, se $\mathscr{C}'$ è la trasformata di $\mathscr{C}$ sotto l'azione di un'isometria e A' e Q' sono le matrici associate ad essa, si ha che $\text{rank}A = \text{rank}A'$, $\det Q = \det Q'$, $\text{sgn}Q = \text{sgn}Q'$. Il tipo e il rango di una conica sono invarianti euclidei (per effetto di isometrie). Le nove forme canoniche delle coniche euclidee. Classificazione delle forme canoniche per rango, tipo e grafico (per distinguere le ellissi e le parabole semplicemente degeneri reali dalle corrispettive con grafico vuoto). Teorema di riduzione in forma canonica: ogni conica euclidea è isometrica ad una soltanto delle nove forme canoniche, ovvero si può sempre trovare un'isometria che trasforma la conica data nella sua forma canonica.

Storia della matematica

Cenni biografici e scientifici sui matematici citati nel corso: Abel, Binet, Capelli, Carnot, Cauchy, Chasles, Cramer, d'Alembert, De Morgan, Descartes, Euclide, Euler, Fourier, Gauss, Gram, Grassmann, Harriot, Kronecker, Lagrange, Laplace, Newton, Pitagora, Rouché, Ruffini, Sarrus, Schmidt, Schwarz, Steinitz, Sylvester.

Libro di testo adottato

GEOMETRIA, A. Cigliola, *La Dotta Editrice*