

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2016/2017
GE210 - Geometria 2 - Tutorato I**

DOCENTE: PROF. ALESSANDRO VERRA
TUTORI: SILVIA MATTIOZZI E MANUELA DONATI

1. Data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:
 $F(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$ per ogni $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^3$ con
 $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$.
 - a) Verificare che F è una forma bilineare.
 - b) Stabilire se F è simmetrica.
 - c) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.
 - d) Stabilire se F è degenere.
 - e) Verificare che i sottospazi $U = \langle (1, 0, 0) \rangle$ e $V = \langle (0, 0, 1) \rangle$ sono ortogonali rispetto alla forma F .
 - f) Dimostrare che non esistono vettori isotropi della forma $(0, 0, t)$ con $t \neq 0$.
 - g) Trovare l'equazione del cono isotropo.

2. Data la seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Scrivere la forma bilineare G definita dalla matrice A rispetto alla base canonica.
 - b) Stabilire se G è degenere e trovare due vettori non nulli $\underline{x}_0, \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^4$ tali che $G(\underline{x}_0, \underline{y}) = 0$ per ogni $\underline{y} \in \mathbb{R}^4$ e $G(\underline{x}, \underline{y}_0) = 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$.
 - c) Scrivere la matrice di G rispetto alla base $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dove: $b_1 = e_1$, $b_2 = -e_1 + e_4$, $b_3 = e_1 + e_2$ e $b_4 = e_3$.
-
3. Vedere per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice (matrice associata, rispetto alla base canonica) rappresenta un prodotto scalare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & 2 & 2 \\ h & 2 & h+2 \end{pmatrix}$$

Applicando, per $h = 1$, il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica di \mathbb{R}^3 , costruire una base ortogonale per \langle, \rangle .

4. Stabilire se le seguenti forme quadratiche sono definite positive, negative o semidefinite positive, negative:

a) $x^2 - y^2 - 2z^2 + \frac{1}{2}xy$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + yz$

c) $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + xy + \frac{1}{2}yz$

5. Diagonalizzare con l'algoritmo di Lagrange la forma bilineare simmetrica b su \mathbb{R}^3 definita (rispetto alla base canonica) dalla matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Dire per quali valori di k esistono affinità tali che l'immagine di $(1, 0)$ sia il punto $(2, 0)$, l'immagine del punto $(0, 1)$ sia $(1, 1)$ e l'immagine dell'origine sia $(2 + k, 1 - k)$.
7. Una retta ha equazione $y = 3x + 1$. Scrivere l'equazione della retta trasformata nell'affinità:

$$\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -2x + y \end{cases}$$