Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE210 - Geometria 2 - Tutorato III

Docente: Prof. Alessandro Verra

Tutori: Silvia Mattiozzi e Manuela Donati

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & a \\ \frac{4}{5} & b \end{pmatrix}$$
Trovare a e b tali che A risulta ortogonale e con determinante -1

2. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto a una base E di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui T è unitario.

3. Dire quali tra queste matrici sono ortogonali
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{-8}{17} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

4. Dimostrare che il prodotto di matrici ortogonali è una matrice ortogonale.

5. Dimostrare che il determinante di una matrice ortogonale è 1 o -1

6. Dire quali tra le seguenti affinità sono isometrie:
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{-4}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

7. Sia b la forma bilineare la cui matrice rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto al prodotto scalare che sia diagonalizzante per b.
b) Dimostrare che $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi(x) = Px$ (dove P è la matrice del cambio di coordinate tra la base canonica e la base B) è un operatore unitario.