Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE210 - Geometria 2 - Tutorato IV

DOCENTE: PROF. ALESSANDRO VERRA

TUTORI: SILVIA MATTIOZZI E MANUELA DONATI

1. Scrivere e classificare l'isometria che si ottiene componendo la rotazione con centro $C = (1, 2)$ di 90 gradi in senso antiorario con la rotazione con centro $C = (3, -4)$ di 90 gradi in senso antiorario.

2. Sia fissato un riferimento cartesiano (O, e_1, e_2) di $\mathbb{E}^2$. Sia f la rotazione di centro $C = (1, 0)$ e angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario). Sia g la riflessione di asse la retta $x = 0$.
a) Scrivere le equazioni dell'isometria $g \circ f$.
b) Dire se tale isometria è una traslazione, una rotazione, una glissoriflessione o una riflessione.

3. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice associata rispetto alla case canonica è

$$A = \begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si trovino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui b è non degenere e quelli per cui è un prodotto scalare.
b) Per $h = -1$ si stabilisca se può esistere una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a b, contenente il vettore $4e_1 + e_3$.
c) Per $h = 0$ si stabilisca se può esistere una base $f = v_1, v_2, v_3$, ortogonale rispetto a b e tale che $b(v_1, v_1) = 0$, $b(v_2, v_2) = 1$, $b(v_3, v_3) = 2$.

4. Si determini una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, applicando il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Si verifichi che la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica é una matrice ortogonale.

5. Siano date le affinità sul piano reale euclideo di equazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{-4}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(a) Individuare le isometrie.
(b) Riconoscere le isometrie dirette e inverse.
(c) Per ciascuna delle isometrie, determinare il luogo dei punti fissi.
(d) Individuare le rotazioni, le traslazioni e le riflessioni. In particolare:
(i) Per ciascuna rotazione, determinare il centro di rotazione e l'angolo di rotazione;
(ii) Per ciascuna traslazione, determinare il vettore di traslazione;
(iii) Per ciascuna riflessione, determinare l'asse di riflessione.
(e) Data la retta $r \subset \mathbb{E}^2$ di equazione $3x - 4y = 0$, determinare l'immagine di r mediante tutte le isometrie.

6. Sia $V = \mathbb{R}^3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

a) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V , applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t + 1, t + t^2, 2 - t - t^3, t^3$$

b) Dato il sottospazio $U =< t^3 - 1, t + 2 >$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^{\perp}$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^{\perp}$.