Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.10 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,k,4)$ e $v_3 = (1,3,k)$ in $\mathbb{R}^3$.

(i) Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$?

(ii) Per quali valori di k v_3 è combinazione lineare di v_1 e di v_2? In corrispondenza di tali valori di k scrivere le equazioni cartesiane e parametriche dello spazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle v_1 = (1,1,0,0); v_2 = (0,0,3,3)\rangle$$

e

$$W = \langle v_3 = (1,-1,1,-1); v_4 = (1,0,2,1)\rangle.$$

Determinare una base, la dimensione, un complemento diretto, equazioni cartesiane e parametriche di U, W, $U \cap W$ ed $U + W$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Siano

$$Y = L(e_1 - 2e_2;\ e_1 + e_3;\ 3e_1 - 4e_2 + e_3) \qquad \text{e} \qquad Z = L(e_2 - 3e_3;\ e_1 - 2e_2 + 7e_3).$$

Si determinino una base, la dimensione, un complemento diretto, equazioni cartesiane e parametriche di Y, Z, $Y \cap Z$ ed $Y + Z$. Stabilire se la somma di Y e Z è diretta.

Esercizio 4. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio E generato da $u_1 = (1,2,0,0)$, $u_2 = (0,1,3,1)$ ed $u_3 = (2,3,-3,-1)$ ed il sottospazio F definito dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z + w = 0 \\ y - 2z + w = 0. \end{cases}$

Determinare dimensione, una base, equazioni cartesiane e parametriche per E, F, $E \cap F$ ed $E + F$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$ costituito dal polinomio nullo e dai polinomi a coefficienti reali nulli o di grado al più 3, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \ \mid\ f(1) = 0 \,\},$$

$$V = \left\{\, a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \ \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \,\right\},$$

$$W = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \ \mid\ f(-1) = 2 \,\}.$$

(i) Si verifichi che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

(ii) Trovare una base, la dimensione, un complemento diretto ed equazioni parametriche e cartesiane di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

(iii) Stabilire se anche W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si considerino

$$U_1 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = (k+1)z,\ y = 0 \right\}$$

e

$$U_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = 0,\ z = kt \right\}.$$

(i) Determinare al variare di k la dimensione di $U_1 + U_2$ e di $U_1 \cap U_2$.

(ii) Determinare al variare di k una base di $U_1 + U_2$ e di $U_1 \cap U_2$.

(iii) Determinare al variare di k equazioni cartesiane e parametriche di $U_1 + U_2$ e di $U_1 \cap U_2$.

(iv) Per quali valori di k la somma di U_1 e di U_2 è diretta?

Esercizio 7. Si consideri il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$W = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = AB \},$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W.

Esercizio 8. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_l = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$, $v_3 = (1,2,-1,0)$ e $v_4 = (0,0,2,1)$. Si pongano $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$. Determinare una base, equazioni parametriche e cartesiane di $U+V$ e di $U \cap V$.

Esercizio 9. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (2,1,1,3), (1,0,1,4), (-1,-1,0,1) \rangle$$

e

$$V = \langle (1,3,3,1), (2,4,3,0), (0,2,3,2) \rangle.$$

Determinare equazioni parametriche e cartesiane di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

Esercizio 10. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Si consideri il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$

$$W = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = 0 \}.$$

Posto $V = \langle \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, determinare equazioni parametriche e cartesiane di W, $V \cap W$ e $V + W$.