Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.11 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio. Siano poi $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e P e Q due suoi punti. Dimostrare che i due sottospazi affini $\mathcal{S}_{P,W}$ e $\mathcal{S}_{Q,W}$ coincidono se e solo se $\overrightarrow{PQ} \in W$.

Esercizio 2. Provare che due rette in uno spazio affine di dimensione $n \geqslant 2$ o coincidono, o sono disgiunte, o si incontrano in esattamente un punto.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche per W.

(ii) Sia dato il punto $P = (1, 0, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Descrivere esplicitamente i punti di $S = \mathcal{S}_{P,W}$. Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Dati $P = (1, 2, 0)$ e $Q = (0, 2, 1)$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, stabilire se $\mathcal{S}_{P,W} = \mathcal{S}_{Q,W}$.

Esercizio 4. In $\mathbb{C}^4$, si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, ix_1 - x_3 = x_1 + ix_2 = 0 \right\}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche per W.

(ii) Sia dato il punto $P = (i, i, i, i) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{C})$. Descrivere esplicitamente i punti di $S = \mathcal{S}_{P,W}$. Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Dati $P = (0, -i, 1, 1)$ e $Q = (0, i, i, -2i)$ in $\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$, stabilire se $\mathcal{S}_{P,W} = \mathcal{S}_{Q,W}$.

Esercizio 5. In ${\mathbb{Z}_3}^4$, si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in {\mathbb{Z}_3}^4 \,\middle|\, x_1 = x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche per W.

(ii) Sia dato il punto $P = (3, -2, 1, -1) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{Z}_3)$. Descrivere esplicitamente i punti di $S = \mathcal{S}_{P,W}$. Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Dati $P = (0, 2, 1, 3)$ e $Q = (0, 1, 1, 1)$ in $\mathbb{A}^4(\mathbb{Z}_3)$, stabilire se $\mathcal{S}_{P,W} = \mathcal{S}_{Q,W}$.

Esercizio 6. Siano dati $P = (3, 2, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$, il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Si ponga $S = \mathcal{S}_{P,W}$.

(i) Determinare dimensione e giacitura di S.

(ii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della giacitura di S.

(iv) Stabilire se $Q = (1, 0, 1) \in S$.

(v) Determinare l'intersezione di S con $\mathcal{S}_{Q,W}$.

(vi) Determinare l'intersezione di S con il sottospazio affine $T : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_1 = -2 \end{cases}$

Esercizio 7. Siano dati $P = (0, 2, 1, -1, 1) \in \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ e $W \subseteq \mathbb{R}^5$, il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0, 0, 0)$. Si ponga $S = \mathcal{S}_{P,W}$.

(i) Determinare dimensione e giacitura di S.

(ii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della giacitura di S.

(iv) Stabilire se $Q = (1, 0, 1, 0, 1) \in S$.

(v) Determinare l'intersezione di S con $\mathcal{S}_{Q,W}$.

(vi) Determinare l'intersezione di S con il sottospazio affine $T : \begin{cases} x_1 - x_2 = \pi \\ x_3 + x_1 = 1 \end{cases}$

Esercizio 8. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + 3 = 2x_2 - x_1 = 0 \right\}.$$

(i) Verificare che si tratta di una retta e determinare la sua giacitura.

(ii) Trovare un punto $P \in S$ ed un punto $Q \notin S$.

(iii) Trovare, se possibile, un piano π_1 che contiene S, un piano π_2 che incontra S in un punto, un piano π_3 disgiunto da S.

(iv) Trovare, se possibile, una retta r_1 che incontra S in un punto e una retta r_2 disgiunta da S.