Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.12 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Provare che la relazione di parallelismo in uno spazio affine non è in generale una relazione transitiva ma che è riflessiva e simmetrica. Provare che essa diventa una relazione di equivalenza nel sottoinsieme dei sottospazi affini di una data dimensione fissata. In tale ipotesi aggiuntiva, determinare un sistema completo di rappresentanti per la relazione di parallelismo.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione $n \geqslant 2$. Siano r ed S rispettivamente una retta ed un sottospazio affine di $\mathbb{A}$. Dimostrare che si verificano le seguenti possibilità:

(i) $r \cap S = \varnothing$;

(ii) $r \cap S$ è costituito da un solo punto;

(iii) r è contenuta in S.

Fornire un esempio esplicito per ciascuno dei casi possibili nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ quando r è una retta fissata.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione $n \geqslant 2$. Siano I ed S rispettivamente un iperpiano ed un sottospazio affine di $\mathbb{A}$. Dimostrare che si verificano le seguenti possibilità:

(i) $I \cap S = \varnothing$;

(ii) S è contenuto in I;

(iii) $I \cap S$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di dimensione pari a $\dim(S) - 1$.

Fornire un esempio esplicito per ciascuno dei casi possibili nello spazio $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ quando I è l'iperpiano di equazione $x_1 - x_2 + x_4 - 1 = 0$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + 3 = x_2 - x_1 - 2 = 2x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

(i) Determinare dimensione, giacitura ed equazioni parametriche di S.

(ii) Trovare un punto $P \in S$ ed un punto $Q \notin S$.

(iii) Trovare, se possibile,

(a) un piano π_1 che contiene S.
(b) un piano π_2 che incontra S in un punto.
(c) un piano π_3 disgiunto da S.
(d) un piano π_4 contenuto in S.
(e) un piano π_5 che incontra S in una retta.
(f) un piano π_6 parallelo ad S.

(iv) Trovare, se possibile,

(a) una retta r_1 che contiene S.
(b) una retta r_2 che incontra S in un punto.
(c) una retta r_3 disgiunta da S.
(d) una retta r_4 contenuta in S.
(e) una retta r_5 parallela ad S.

(v) Trovare, se possibile,

(a) un iperpiano T_1 che contiene S.
(b) un iperpiano T_2 che incontra S in un punto.
(c) un iperpiano T_3 disgiunto da S.
(d) un iperpiano T_4 contenuto in S.
(e) un iperpiano T_5 che incontra S in una retta.
(f) un iperpiano T_6 parallelo ad S.
(g) un iperpiano T_7 che incontra S in un piano.

Esercizio 5. Sia data in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 2 \end{cases}$ Determinare due sottospazi affini diversi da r la cui intersezione è r.

Esercizio 6. Sia data in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ la retta $r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = -1 - t \end{cases}$ Determinare due sottospazi affini diversi da r la cui intersezione è r.

Esercizio 7. Sia data in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ la retta $r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = -1 - t \end{cases}$ Determinare due sottospazi affini la cui intersezione contiene propriamente r.