Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.1 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Siano dati R un anello commutativo ed m, n interi positivi. Sia $\mathcal{M}_{m\times n}(R)$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti in R dotato della somma termine a termine, indicata con +. Provare che $(\mathcal{M}_{m\times n}(R), +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 2. Siano dati R un anello commutativo unitario, con $1_R \neq 0_R$, ed n un intero positivo. Sia $\mathcal{M}_n(R)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in R dotato della somma termine a termine (indicata con +) e del prodotto riga per colonna (indicato con $\cdot$).

(i) Provare che $(\mathcal{M}_n(R), +, \cdot)$ è un anello unitario.

(ii) Verificare che $\mathcal{M}_1(R)$ è isomorfo ad R come anello.

(iii) Verificare che, se $n \geqslant 2$, allora $\mathcal{M}_n(R)$ non è un anello commutativo.

(iv) Provare che, se $n \geqslant 2$, allora $\mathcal{M}_n(R)$ contiene divisori dello zero.

Esercizio 3. Calcolare:

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 - {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Trovare una formula per il calcolo delle seguenti potenze di matrici a coefficienti reali e la si dimostri per induzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n.$$

Esercizio 5. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, provare che $A^2 = 2A - I_2$ e calcolare A^{100}.

Esercizio 6. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $X^2 = I_2$. Provare inoltre che l'unica matrice per cui si ha $X^3 = I_2$ è la matrice $X = I_2$.

Esercizio 7. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che annullano la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 8. Trovare tutte le matrici che commutano con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Ripetere lo stesso esercizio con la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 9. Siano K un campo ed n un intero positivo. Dimostrare che il *centro* dell'anello $\mathcal{M}_n(K)$ è l'insieme delle matrici *scalari* quadrate di ordine n, ovvero

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(K)) = \{ aI_n \mid a \in K \} .$$

Esercizio 10. Siano K un campo ed $n \geqslant 2$ un intero.

(i) Provare che se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è una matrice nilpotente allora A è un divisore dello zero e non può essere invertibile.

(ii) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ tali che $AB = \mathbf{0}$. Provare che la matrice BA è nilpotente.

(iii) Provare che se A è una matrice nilpotente allora $I_n - A$ è una matrice invertibile.

Esercizio 11. Sia A una matrice quadrata a coefficienti in un campo. Si supponga che A abbia una riga od una colonna le cui entrate sono tutte nulle. Provare che A non può essere invertibile.

Esercizio 12. Sia K un campo e sia $GL_n(K)$ l'insieme delle matrici invertibili di $\mathcal{M}_n(K)$. Provare che $GL_n(K)$ è un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna. È un gruppo abeliano?

Esercizio 13. Sia O_n l'insieme delle matrici ortogonali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Provare che O_n è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$.

(ii) Sia $A \in O_n$. Dimostrare che il prodotto riga per colonna di due righe distinte di A dà 0 e che il prodotto riga per colonna di una riga per sé stessa dà 1. Provare che vale la cosa analoga per le colonne di A

(iii) Costruire esplicitamente un elemento di O_2 ed uno di O_3.

Esercizio 14. Sia R un anello commutativo unitario ed n un intero positivo. Siano A e B due matrici simmetriche di ordine n ad entrate in R. Dimostrare che per ogni $a, b \in R$ la matrice $aA + bB$ è una matrice simmetrica. Provare inoltre che AB è una matrice simmetrica se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 15. Siano K un campo di caratteristica diversa da 0 ed n un intero positivo.

(i) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice simmetrica. Provare che gli elementi di A posti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uguali.

(ii) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice antisimmetrica. Provare che gli elementi di A posti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono opposti e che gli elementi della diagonale sono tutti nulli.

(iii) Si dimostri che per ogni $A \in \mathcal{M}_n(K)$, le matrici $A + {}^tA$, ${}^tAA$ ed A^tA sono simmetriche e che la matrice $A - {}^tA$ è antisimmetrica.

(iv) Provare che l'unica matrice che è sia simmetrica che antisimmetrica è la matrice nulla.

(v) Provare che ogni elemento di $\mathcal{M}_n(K)$ può essere scritto in maniera unica come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

(vi) Decomporre le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Esercizio 16. Determinare tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari triangolari nel campo accanto indicato:

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_3 = 1 \end{cases}$ su $\mathbb{Z}_3$;

(ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_3 = 1 \end{cases}$ su $\mathbb{R}$;

(iii) $\begin{cases} i\,x_1 + i\,x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - i\,x_3 = 1 \\ -x_3 = i \end{cases}$ su $\mathbb{C}$;

(iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ su $\mathbb{R}$;

(v) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ su $\mathbb{R}$.