Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.2 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti sistemi sono compatibili ed in caso affermativo si determinino tutte le loro soluzioni nei campi accanto indicati:

(i) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}_5$;

(ii) $\begin{cases} 4x - y + z = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$;

(iii) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -2x + 2y - 6z = 1 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(iv) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 7 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(v) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_5$;

(vi) $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 3y + 2z = 13 \\ x - y + 3z = 12 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}_7$;

(vii) $\begin{cases} 2x + y - z = i \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x - y + 3z = -2i \end{cases}$ in $\mathbb{C}$;

(viii) $\begin{cases} -y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = -5 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$;

(ix) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$;

(x) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}_3$;

(xi) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 5 \\ 4x + 7y + 10z = 7 \\ 5x + 9y + 13z = 9 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}_2$;

(xii) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$ in $\mathbb{Q}$;

(xiii) $\begin{cases} x_1 + x_3 + ix_4 + x_5 = -i \\ x_1 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + ix_4 + 3x_5 = 4 - i \end{cases}$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 2. Stabilire se le seguenti matrici quadrate a coefficienti reali sono invertibili ed in caso affermativo si determini la loro matrice inversa:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \neq 0$;

(vii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \neq 0$.

Esercizio 3. Sotto quali ipotesi la matrice a coefficienti reali $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile? Determinare la sua inversa.

Esercizio 4. Scrivere le seguenti matrici a coefficienti reali come prodotto di matrici elementari e determinare la loro matrice inversa:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$.

Esercizio 5. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi a coefficienti reali col metodo della matrice inversa:

(i) $\begin{cases} 6x_1 - 17x_2 = -22 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} ay + bz = ab + bc \\ ax + cz = a^2 + c^2 \\ bx + cy = ab + bc \end{cases}$ con $abc \neq 0$.

Esercizio 6. Siano K un campo ed $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dimostrare che la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Provare inoltre che in tale ipotesi, la sua inversa è $\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$.