Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.4 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1,\ -1,\ 1),\ v_2 = (2,\ 1,\ -1),\ v_3 = (1,\ -4,\ 4).$$

Esercizio 2. Dopo aver verificato che i tre vettori di $\mathbb{C}^2$ $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,-i)$ e $v_3 = (-2,6)$ sono linearmente dipendenti, si scriva v_3 come combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2 ed il vettore v_1 come combinazione lineare di v_2 e v_3.

Esercizio 3. Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,1,-1)$ e $v_3 = (1,2,3)$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Scrivere il vettore $(3,-1,1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. Provare infine che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 4. Sono dati i vettori $v = (1,1,3,1)$ e $w = (2,0,0,-1)$ di $\mathbb{R}^4$. Per quali valori reali di k il vettore $(0,2,k,3)$ è combinazione lineare di v e w?

Esercizio 5. Siano dati i vettori $u = (1,2,1)$, $v = (1,0,2)$ e $w = (1,k,-1)$ di $\mathbb{R}^3$. Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$? Determinare la dimensione di $\langle u,v,w\rangle$ e di $\langle v,w\rangle$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:

(i) $A = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \,\}$;

(ii) $B = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \,\}$;

(iii) $C = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \,\}$;

(iv) $D = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \,\}$;

(v) $E = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geqslant 0 \,\}$;

(vi) $F = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0 \,\}$;

Esercizio 7. Determinare una base del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \big\langle (2,-1,1,1),\ (0,0,0,0),\ (1,-1,1,1),\ (1,0,0,0),\ (4,-2,2,2) \big\rangle .$$

Esercizio 8. Determinare una base del sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \big\langle \big(1, -3, -2\big),\ (0, -1, -1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 0),\ (-1, 2, 1)\big\rangle .$$

Esercizio 9. Sia $E = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{Q}^4$. Per quali valori di k si ha che $(1, k, 2, -1) \in E$?

Esercizio 10. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici tali che la somma degli elementi delle loro diagonali dia 0. Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e se ne determini una base.

Esercizio 11. Dopo aver risolto i seguenti sistemi nel campo accanto indicato, si determini una base per lo spazio vettoriale delle loro soluzioni:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10z = 0 \\ 5x + 9y + 13z = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R};$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R};$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -4x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -10x - 6y = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Z}_5;$$

$$\text{(iv)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Q};$$

$$\text{(v)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R};$$

$$\text{(vi)} \quad \begin{cases} 2x_1 + ix_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ -x_1 - ix_2 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{C}.$$

Esercizio 12. Sia dato

$$U = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leqslant 2,\ f(-2) = 0 \,\} \cup \{\, 0 \,\} .$$

Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Dimostrare che ha dimensione finita, determinare una sua base e scrivere il polinomio $g(x) = (x+2)(3x-1)$ come combinazione lineare di tale base.

Esercizio 13. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \,\} \cup \{\, 0 \,\}\,.$$

Provare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Provare che esso ha dimensione finita e si determini una sua base su $\mathbb{R}$. Si scriva il vettore $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ come combinazione lineare dei vettori di questa base.

Esercizio 14. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Determinare una base degli spazi vettoriali $Sym_n(k)$ e $ASym_n(k)$.

Esercizio 15. Si considerino i vettori $u = (2, k, 1)$, $v = (k, 2, 0)$ e $w = (0, 0, k)$ di $\mathbb{R}^3$ e sia F il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i vettori u, v e w sono una base di $\mathbb{R}^3$? Calcolare la dimensione di F al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 16. Si considerino i polinomi $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -kx^2 + 1$ e $h(x) = kx^2 + k$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ e sia B il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i polinomi $f(x), g(x)$ e $h(x)$ sono una base di B? Calcolare la dimensione di B al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k il polinomio $a(x) = 2 - kx + kx^2$ appartiene a B?

Esercizio 17. Sia Z il sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene ad $\langle A_1, A_2 \rangle$?

Esercizio 18. Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale

$$V = \langle -x + 1,\ 2x - 2,\ x^2 - 1,\ 6 \rangle \subseteq \mathbb{Z}_3[x].$$

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}_3$ il polinomio $\lambda x^2 - 1 \in V$?