Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.5 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Siano dati

$$V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y=0 \right\}$$

e

$$W = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x-y=0 \right\}.$$

Provare che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e verificare che $V \cup W$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ che contiene $V \cup W$? Determinare una sua base.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,2,2)$. Siano poi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y+z-t=0 \right\}.$$

(i) Trovare una base e la dimensione di V.

(ii) Trovare una base e la dimensione di W.

(iii) Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$.

(iv) Provare che $V + W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i sottospazi U definito dall'equazione $x+y-z=0$ e V quello generato da $(2,4,3)$ e $(1,3,1)$.

(i) Determinare una base di U.

(ii) Trovare una base di $U \cap V$.

(iii) Trovare una base di $U + V$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$V = \left\{ a + (2a-b)X + (a-b)X^3 \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \mid f(-1) = 2 \}.$$

(i) Si verifichi che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

(ii) Trovare una base e la dimensione di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

(iii) Stabilire se anche W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

Esercizio 5. Si consideri il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$W = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = AB \},$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sia poi $S = Sym_2(\mathbb{R})$, l'insieme delle matrici simmetriche di tipo 2×2 ad entrate reali.

(i) Provare che W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne dimensione ed una base.

(ii) Costruire una base di $W+S$ e $W \cap S$.

(iii) Completare le basi trovate di W e $W \cap S$ ad una base di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 6. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (2,1,1,3), (1,0,1,4), (-1,-1,0,1) \rangle$$

e

$$V = \langle (1,3,3,1), (2,4,3,0), (0,2,3,2) \rangle.$$

(i) Calcolare la dimensione di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

(ii) Completare una base di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 7. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

e

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) Calcolare la dimensione di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

(ii) Completare una base di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 8. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) Calcolare la dimensione di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$.

(ii) Completare una base di U, V, $U+V$ ed $U \cap V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.