**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014**
**GE110 - Geometria 1**
**Foglio n.6 - Antonio Cigliola**

**Esercizio 1** (**Teorema del complemento diretto**)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $\dim V = n$. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di $V$ di dimensione $m \leqslant n$. Allora esiste $W' \subseteq V$ sottospazio vettoriale di $V$ tale che

(i) $V = W \oplus W'$,

(ii) $\dim W' = n - m$,

(iii) per ogni $v \in V$ esistono e sono unici due vettori $w \in W$ e $w' \in W'$ tali che $v = w + w'$.

Un tale sottospazio $W'$ è detto *complemento diretto* (o *supplemento*) di $W$.

**Esercizio 2.** Dato un sottospazio $W$ di uno spazio vettoriale $V$, è unico il complemento diretto di cui il precedente esercizio garantisce l'esistenza?

**Esercizio 3.** Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle v_1 = (1,1,0,0); v_2 = (0,0,3,3)\rangle$$

e

$$W = \langle v_3 = (1,-1,1,-1); v_4 = (1,0,2,1)\rangle.$$

(i) Determinare una base, la dimensione ed un supplemento di $U$.

(ii) Determinare una base, la dimensione ed un supplemento di $W$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $U + W$.

(iv) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

(v) Completare le basi trovate di $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

(vi) Completare la base trovata di $U \cap W$ ad una base di $U$ e ad una di $W$.

**Esercizio 4.** Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $E$ generato da $u_1 = (1,2,0,0)$, $u_2 = (0,1,3,1)$ ed $u_3 = (2,3,-3,-1)$ ed il sottospazio $F$ definito dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z + w = 0 \\ y - 2z + w = 0. \end{cases}$

(i) Determinare un complemento diretto di $E \cap F$.

(ii) Stabilire se $E$ ed $F$ sono sommandi diretti.

**Esercizio 5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Siano

$$Y = \langle e_1 - 2e_2;\ e_1 + e_3;\ 3e_1 - 4e_2 + e_3 \rangle$$

e

$$Z = \langle e_2 - 3e_3;\ e_1 - 2e_2 + 7e_3 \rangle.$$

(i) Si determinino basi e dimensioni di $Y$, $Z$, $Y \cap Z$ ed $Y + Z$.

(ii) Stabilire se la somma di $Y$ e $Z$ è diretta.

(iii) Trovare un complemento diretto di $Y \cap Z$ in $Y$, in $Z$, in $Y + Z$ ed in $V$.

**Esercizio 6.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e siano $E$ ed $F$ suoi sottospazi di dimensione 3 e 4 rispettivamente. Fornire una stima per le dimensioni di $E + F$ ed $E \cap F$.

**Esercizio 7.** Si consideri il sottoinsieme $W$ di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$W = \{\ A \in M_2(\mathbb{R})\ \mid\ A = AB\ \},$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Costruire una base di $W$.

(ii) Determinare un complemento diretto di $W$ in $M_2(\mathbb{R})$.

**Esercizio 8.** Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali $E_h$, generato dai vettori $v_1 = (2,\ 1,\ 0)$, $v_2 = (0,\ 2,\ h)$ e $v_3 = (2,\ 3,\ h)$, dove $h$ è un parametro reale, ed

$$F = \left\{\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ x - y = y + z = 0\ \right\}.$$

(i) Stabilire per quali valori di $h$ si ha che $E_h \oplus F = \mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare un complemento diretto di $F$.

**Esercizio 9.** Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $E$ generato da $u_1 = (1,1,2,0)$ ed $u_2 = (0,1,0,1)$, ed il sottospazio $F_k$ definito dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z + kw = 0 \end{cases}$, con $k$ parametro reale.

(i) Per quali valori di $k$ la somma $E + F_k$ è diretta?

(ii) Determinare una base di un complemento di $E$ in $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 10.** Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V_1 = \langle (2,1,0,1), (1,2,3,2), (1,0,-1,0) \rangle$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y + z + 2t = 2x - z = y + z + t = 0 \right\}.$$

(i) Determinare le dimensioni di $V_1$ e $V_2$.

(ii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

**Esercizio 11.** Determinare il rango delle seguenti matrici a coefficienti reali:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 100 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} \pi & \pi^2 \\ \pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix}$

**Esercizio 12.** Determinare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 13.** Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 \\ 0 & -h & -h & 0 \end{pmatrix}.$$